ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

13

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1890.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ

DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

Nunquam præscriptos transibunt sidera fines

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Chapitre II. Etudes des surfaces asymptotiques.

Chapitre III. Résultats divers.

Chapitre IV. Tentatives de généralisation.

Introduction.

Le travail qui va suivre et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps est un remaniement du mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire mieux ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. Phragmén qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^m et de T_i^m à la fin du § 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

Dans quelques-unes des additions que j'ai faites au mémoire primitif, je me borne à rappeler certains résultats déjà connus; comme ces résultats sont dispersés dans un grand nombre de recueils et que j'en fais un fréquent usage, j'ai cru rendre service au lecteur en lui épargnant de fastidieuses recherches; d'ailleurs je suis souvent conduit à appliquer ces théorèmes sous une forme différente de celle que leur auteur leur avait d'abord donnée et il était indispensable de les exposer sous cette nouvelle forme. Ces théorèmes acquis, dont quelques-uns sont même classiques

sont développés, à côté de quelques propositions nouvelles, dans le chapitre 1^{er} ($1^{ère}$ partie).

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

Comme on le voit, ces résultats ne nous apprennent que peu de chose sur le cas général du problème; mais ce qui peut leur donner quelque prix, c'est qu'ils sont établis avec rigueur, tandis que le problème des trois corps ne paraissait jusqu'ici abordable que par des méthodes d'approximation successive où l'on faisait bon marché de cette rigueur absolue qui est exigée dans les autres parties des mathématiques.

Mais j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs qui sont développés à la fin du mémoire. J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique et uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués. Plus on réfléchira sur les propositions que je démontre plus loin, mieux on comprendra que ce problème présente des difficultés inouies, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur.

J'ai fait voir également que la plupart des séries employées en mécanique céleste et en particulier celles de M. Lindstedt qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. Lindstedt ou sur les recherches plus profondes de M. Gyldén. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On sait en effet le parti qu'on peut tirer dans un calcul numérique de l'emploi des séries divergentes et la série fameuse de Stirling en est un

exemple frappant. C'est grâce à une circonstance analogue que les développements usités en mécanique céleste ont rendu déjà de si grands services et sont appelés à en rendre de plus grands encore.

L'une des séries dont je ferai usage plus loin et dont je démontrerai d'ailleurs la divergence, offre une grande analogie avec un développement proposé par M. Bohlin à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1888. Comme son mémoire n'a été imprimé que quelques mois plus tard, je n'en avais pas connaissance à l'époque de la fermeture du concours, c'est à dire le 1[er] juin 1888. Je n'ai donc pas cité le nom de M. Bohlin, je m'empresse de lui rendre ici la justice qui lui est due. (Cf. Supplément aux comptes rendus de l'Académie de Stockholm, Tome 14 et Astronomische Nachrichten, N° 2883.)

Première partie.

Généralités.

CHAPITRE I.

Propriétés générales des équations différentielles.

§ 1. *Notations et définitions.*

Considérons un système d'équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, où enfin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons en général que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on savait intégrer les équations (1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes; on pourrait écrire:

$$(2) \quad x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ \ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire encore, en résolvant par rapport à ces constantes:

$$\begin{aligned} C_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ C_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3), $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont *n intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons:

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \qquad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doivent être remplacées par $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_p.$$

et que les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte p *degrés de liberté.*

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives:

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrons alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations:

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps t, le point P décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire.* A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers.*

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire.*

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité,* si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent

inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera tout entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$

les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z. Nous pourrons considérer non plus x_1, x_2, x_3, mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3. Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{7}$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrons alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou

bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3), \qquad x_4 = \psi_4(z_1, z_2, z_3),$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ψ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z, au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3.

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives:

$$F = C,$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π. La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires;* les autres seront *linéaires.*

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une ou plu-

sieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π. Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\;, \quad \ldots\;, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \qquad (k \text{ étant entier})$$

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π, toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

§ 2. *Calcul des limites.*

L'une des plus belles découvertes de Cauchy (Comptes rendus, tome 14, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x\,,\, y\,,\, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x\,,\, y\,,\, z). \end{aligned}$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de $x\,,\, y$ et z, ces équations admettront une solution de la forme suivante

$$y = \varphi_1(x), \qquad z = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x.

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme:

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1 - \alpha x)(1 - \beta y)(1 - \gamma z)},$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2. En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f', on augmente les coefficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme:

$$(1') \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z), \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = 1.$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - a(x + y + z)};$$

elles deviendront:

$$(2') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - a(x + y + z)}.$$

Les équations (1') sont satisfaites formellemant par des séries:

$$x = \varphi(t) = t, \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t.

De même les équations (2′) seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \qquad y = \varphi_1'(t), \qquad z = \varphi_2'(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t. (On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) = \varphi_2'(t)$.)

Si M et α sont convenablement choisis, les coefficients des séries φ' sont plus grands que ceux des séries φ; or les séries φ' convergent; donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. Jordan (tome 3, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

Théorème I. Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y et z, mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ. Ecrivons alors les équations (1) sous la forme:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu) = 1,$$
$$(1'') \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu),$$
$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui satisfassent formellement aux équations (1″), qui soient développées suivant les puissances croissantes de t, de μ et de trois constantes d'intégration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction:

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - a(x + y + z)]}.$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ. On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f, de f_1 et de f_2.

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$(2'') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - a(x + y + z)]}.$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

$$z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0, satisfaisant aux équations $(2'')$ et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$.

En raisonnant comme le faisait Cauchy, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ. Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Théorème II. Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t, soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des *quatre* variables μ, x_0, y_0 et z_0, quelque grand que soit t pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0 et quand

$$|t| < \rho,$$

ρ étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t_1 est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0, c'est à dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs de x_1, y_1 et z_1 pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$

$$\begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ y &= \varphi_1'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ z &= \varphi_2'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0). \end{aligned} \tag{3}$$

Les séries φ', φ_1' et φ_2', tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2, sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de $t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t = t_1$.

Elles convergeront si $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ sont assez petits et si

$$|t - t_1| < \rho_1,$$

ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1.

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1, on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$. Mais $x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0. Donc, pour tout point t intérieur au cercle

C_1, les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1, le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de t, de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois, pourvu que les rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots$ des cercles de convergence envisagés successivement restent supérieurs à une quantité donnée.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0, quelque grand que soit t_0.

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de Cauchy cesse d'être vrai si les fonctions f_1 et f_2 ne sont plus holomorphes en x, y, z; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ, de $x - x_1^0, y - y_1^0, z - z_1^0$, il n'existera pas en général trois séries φ', φ_1' et φ_2' de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x = x_1^0, \qquad y = y_1^0, \qquad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t, on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, le rayon de convergence de la série de Cauchy ne pourra s'annuler et on pourra lui assigner une limite inférieure, de sorte que les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0. Mais si pour $t = t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0.

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet:

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ (x_3, y_3, z_3)$$

les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à ce choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Le même résultat peut encore être établi d'une autre manière. Reprenons les équations:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

Les fonctions f, f_1, f_2 pourront en général être développées suivant les puissances croissantes de $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \mu - \mu_0$, pour les valeurs de x, y, z et μ suffisamment voisines de x_0, y_0, z_0 et μ_0. S'il existe un système de valeurs de x_0, y_0, z_0, μ_0 pour lequel cela n'ait pas lieu, je dirai que ce système de valeurs est *un des points singuliers* de nos équations différentielles.

Cela posé, ces équations admettront une solution telle que x, y et z s'annulent avec t; et cette solution dépendra manifestement de μ. Soit:

$$x = \omega_1(t, \mu), \qquad y = \omega_2(t, \mu), \qquad z = \omega_3(t, \mu)$$

cette solution. Il résulte de la définition même de cette solution que l'on a, quel que soit μ:

$$\omega_1(0, \mu) = \omega_2(0, \mu) = \omega_3(0, \mu) = 0.$$

Dans la plupart des applications, on pourra effectuer l'intégration pour $\mu = 0$, de telle sorte que les fonctions $\omega_1(t, 0), \omega_2(t, 0), \omega_3(t, 0)$ seront

connues. Je suppose que, pour aucune des valeurs de t comprises entre o et t_1, le système de valeurs

$$\omega_1(t, 0), \ \omega_2(t, 0), \ \omega_3(t, 0), \ 0$$

ne soit un point singulier de nos équations différentielles.

Pour employer un langage incorrect, mais commode, je dirai que la solution particulière

$$x = \omega_1(t, 0), \qquad y = \omega_2(t, 0), \qquad z = \omega_3(t, 0)$$

ne passe par aucun point singulier.

Si cela n'avait pas lieu, nous nous trouverions dans le cas d'exception dont j'ai parlé plus haut.

Si au contraire cela a lieu, ce que je supposerai, je dis que les expressions $\omega_1(t_1, \mu)$, $\omega_2(t_1, \mu)$, $\omega_3(t_1, \mu)$ sont des fonctions de μ développables suivant les puissances croissantes de cette variable.

Posons en effet

$$x = \xi + \omega_1(t, 0), \qquad y = \eta + \omega_2(t, 0), \qquad z = \zeta + \omega_3(t, 0),$$

les équations différentielles deviendront:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, t, \mu). \end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que pour toutes les valeurs de t comprises entre o et t_1, les fonctions φ, φ_1 et φ_2 peuvent être développées suivant les puissances de ξ, η, ζ et μ, les coefficients du développement étant des fonctions du temps.

J'observe de plus que pour $\mu = 0$, les équations différentielles doivent être satisfaites pour

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

ce qui veut dire que φ, φ_1 et φ_2 s'annulent quand μ, ξ, η, ζ s'annulent à la fois.

On pourra alors trouver deux nombres positifs M et α tels que, pour toutes les valeurs de t comprises entre o et t_1, chaque coefficient du développement de φ, φ_1 ou φ_2 suivant les puissances croissantes de ξ, η, ζ et μ soit plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant du développement de:

$$\frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}$$

ou a fortiori que le coefficient correspondant du développement de:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) = \frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)[1 + \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)]}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}.$$

Comparons donc les équations (4) aux suivantes:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \psi(\xi, \eta, \zeta, \mu). \tag{5}$$

La solution des équations (4), qui est telle que ξ, η et ζ s'annulent à la fois pour $t = 0$, s'écrit:

$$\xi = \omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0), \qquad \eta = \omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0),$$
$$\zeta = \omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0).$$

D'un autre côté les équations (5) admettent une solution:

$$\xi = \eta = \zeta = \omega'(t, \mu)$$

telle que ξ, η, ζ s'annulent avec t.

En raisonnant comme l'a fait Cauchy, on verrait que si $\omega'(t, \mu)$ est développable suivant les puissances croissantes de μ, il doit en être de même de $\omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0)$, et que chaque coefficient du développement de ces trois dernières fonctions est plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant de $\omega'(t, \mu)$, au moins pour toutes les valeurs de t telles que

$$0 < t < t_1.$$

Or les équations (5) sont faciles à intégrer et on vérifie aisément que

$\omega'(t_1, \mu)$ peut se développer suivant les puissances de μ. Donc ξ, η et ζ sont également développables suivant les puissances de μ pourvu que

$$0 < t < t_1.$$

C. Q. F. D.

Théoréme III. Cela posé, soit:

$$x = \omega_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \omega_3(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

celle des solutions de nos équations différentielles, qui est telle que:

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0$$

pour $t = 0$.

Considérons les fonctions:

$$\omega_1(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$\omega_3(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0).$$

Je dis qu'elles sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Posons en effet

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \qquad z = z' + z_0,$$
$$t = t'\frac{t_1 + \tau}{t_1}.$$

Nos équations deviendront:

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_1(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_2(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu).$$

Ces équations contiennent cinq paramètres arbitraires à savoir

$$\mu, x_0, y_0, z_0, \tau.$$

Considérons donc la solution de ces équations qui est telle que x', y', z' s'annulent avec t'; soit:

$$x' = \omega_1'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$

$$y' = \omega_2'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$

$$z' = \omega_3'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau).$$

Il résulte de ce que nous venons de voir que si l'on fait $t' = t_1$ les expressions:

$$\omega_1'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$

$$\omega_2'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$

$$\omega_3'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau)$$

sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ. Mais il est manifeste que l'on a:

$$\begin{aligned} \omega_1'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_1(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ \omega_2'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ \omega_3'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_3(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Donc les seconds membres des équations (6) sont également développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ.

C. Q. F. D.

Théorème IV. CAUCHY a tiré du calcul des limites un autre théorème d'une extrême importance.

Voici quel est ce théorème:

Si on a $n + p$ quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p$ entre lesquelles ont lieu n relations:

$$\begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0; \end{aligned} \tag{7}$$

si les f sont développables suivant les puissances des x et des y et s'annulent avec ces $n+p$ variables;

si enfin le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas nul quand les x et les y s'annulent à la fois;

on pourra tirer des équations (7) les n inconnues y sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Considérons en effet x_1 comme la seule variable indépendante x_2, $x_3, \ldots, x_p$ comme des paramètres arbitraires, nous pourrons remplacer les équations (7) par les n équations différentielles:

$$\frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \ldots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$; si quand les x et y s'annulent à la fois on a:

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dy} \gtrless 0;$$

si enfin y est défini par l'égalité

$$f = 0,$$

y sera développable suivant les puissances de x.

Il nous resterait à examiner ce qui se passe quand le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y est nul. Cette question a fait l'objet de recherches nombreuses sur lesquelles je ne puis insister ici, mais au premier rang desquelles il convient de citer les travaux de M. Puiseux sur les racines des équations algébriques. J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de recherches analogues dans la première partie de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879). Je me bornerai donc à énoncer les théorèmes suivants, en me bornant à renvoyer pour les démonstrations, soit aux traités classiques, soit à ma thèse.

Théorème V. Soit y une fonction de x définie par l'équation

$$f(y, x) = 0 \tag{9}$$

où f est développable suivant les puissances de x et de y.

Je suppose que pour $x = y = 0$, f s'annule ainsi que:

$$\frac{df}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}},$$

mais que $\frac{d^m f}{dy^m}$ ne s'annule pas.

Il existera m séries de la forme suivante:

$$(10) \qquad y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots$$

(où n est entier positif et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des coefficients constants) qui satisferont à l'équation (9).

Corollaire I. Si la série (10) satisfait à l'équation (9) il en est de même de la série:

$$y = a_1 \alpha x^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 \alpha^3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots$$

ou α est une racine n^e de l'unité.

Corollaire II. Le nombre des séries de la forme (10) développées suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n}}$, (sans pouvoir être développées suivant les puissances de $x^{\frac{1}{p}}$, $p < n$) est divisible par n.

Corollaire III. Si $k_1 n_1$ est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_1}}$, si $k_2 n_2$ est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_2}}, \ldots$, si $k_p n_p$ est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_p}}$ on aura:

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \ldots + k_p n_p = m,$$

d'où l'on conclut que si m est impair, l'un au moins des nombres n_1, $n_2, \ldots, n_p$ est aussi impair.

Théorème VI. Si l'on a les équations

$$(11) \qquad \begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &f_p(y_1, y_2, \ldots, y_p, x) = 0, \end{aligned}$$

dont les premiers membres sont développables suivant les puissances des y et de x et s'annulent avec ces variables, on pourra toujours éliminer entre ces équations

$$y_2, y_3, \ldots, y_p$$

et arriver à une équation unique:

$$f(y_1, x) = 0$$

de même forme que l'équation (9) du théorème précédent.

Il n'y aurait d'exception que si les équations (11) cessaient d'être distinctes.

Corollaire des théorèmes V et VI. Le théorème IV s'applique toutes les fois que le déterminant fonctionnel des f n'est pas nul, c'est à dire toutes les fois que quand les x s'annulent, les équations

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0 \tag{7}$$

admettent

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

comme une solution *simple*.

Il résulte des théorèmes V et VI et de leurs corollaires énoncés plus haut que le théorème IV est encore vrai si cette solution est multiple, *pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.*

§ 3. *Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles.*

Cauchy avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame Kowalevski a considérablement simplifié la démonstration de Cauchy et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame Kowalevski (Journal de Crelle, tome 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en fonctions de p variables indépendantes.

Supposons que ce système s'écrive:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx_1} &= f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),\\
\frac{dz_2}{dx_1} &= f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_n}{dx_1} &= f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),
\end{aligned}
$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant développés suivant les puissances de

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \quad \text{et des} \quad \frac{dz_i}{dx_k} - \alpha_{ik}$$

(i prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$; k les valeurs $2, 3, \ldots, p$; enfin les α_{ik} sont des constantes quelconques).

Soit maintenant

$$\psi_1(x_2, x_3, \ldots, x_p), \quad \psi_2(x_2, x_3, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad \psi_n(x_2, x_3, \ldots, x_p)$$

n fonctions données *quelconques,* développées suivant les puissances croissantes de $x_2, x_3, \ldots, x_p$ et telles que:

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = \alpha_{ik}$$

pour

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0.$$

Il existera n fonctions

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

développables suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, qui satisferont aux équations (1) *et qui se réduiront respectivement à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ pour $x_1 = 0$.*

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Madame Kowalevski (*Thèse inaugurale,* Paris, Gauthier-Villars, 1879) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation:

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z, \tag{2}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; je suppose de plus que dans le développement de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1[er] degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une suite de termes du 2[d] degré au moins par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour que cette intégrale existe, il suffit:

1° que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine,

2° que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.[1]

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (2) envisageons l'équation suivante:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z. \tag{3}$$

---

[1] Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait

$$m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1 \quad (m_2 + m_3 + \ldots + m_n > 1)$$

certains coefficients du développement prendraient la forme $\frac{A}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$ certains coefficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

Nous avons encore

$$X_i - \lambda_i x_i = Y_i,$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ne comprenant que des termes du 2ᵈ degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i ne dépend pas seulement des x, il dépend aussi de t, de sorte que les coefficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t. Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (3) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de t.

Voyons d'abord qu'elle va être la forme de Y_i. Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; considérons le terme en

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t, ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{t\sqrt{-1}}$.

Nous pourrons donc écrire

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les C sont des coefficients constants; β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq 2.$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices:

$$Y_i = \sum C e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Posons maintenant:

$$Y'_i = \sum |C| e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

et envisageons l'équation suivante:

$$(4) \qquad (\lambda'_1 x_1 - Y'_1)\frac{dz}{dx_1} + (\lambda'_2 x_2 - Y'_2)\frac{dz}{dx_2} + \ldots + (\lambda'_n x_n - Y'_n)\frac{dz}{dx_n} = \lambda'_1 z.$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantites $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (4) (qui est de même forme que l'équation (2)) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposerons

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \ldots = \lambda'_n.$$

Nous supposerons de plus λ'_1 réel et positif.

Cela posé, soit

$$(5) \qquad z = \sum A_{\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (3). Comment pourra-t-on calculer les coefficients A par récurrence.

En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve:

$$A_{\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1] = P[C, A],$$

$P[C, A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux C et aux coefficients A déjà calculés.

Soit maintenant

$$(6) \qquad z = \sum A'_{\beta,\alpha_1\ldots\alpha_n} e^{\sqrt{-1}\beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant à l'équation (4). Pour calculer les coefficients A' nous écrirons l'équation (4) sous la forme:

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}.$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons:

$$A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \ldots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1] = P[|C|, A'].$$

$P[|C|, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A'.

Les λ' étant réels positifs ainsi que les coefficients du polynôme P, les A' seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite:

$$|A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}| < A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

il suffit que l'on ait toujours:

$$\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \ldots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1 < |\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1|$$

ou

$$\lambda'_1 < \left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right|. \tag{7}$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité (7), on aura donc

$$|A| < A'.$$

Or la série (6) converge, donc il en sera de même de la série (5).

Ainsi donc pour que la série (5) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive λ'_1 satisfaisant à l'inégalité (7) pour toutes les valeurs entières et positives des α, et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β.

Commencons par remarquer que le second membre de l'inégalité (7) est toujours plus grand que:

$$\left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right|. \tag{8}$$

Il suffira donc que λ'_1 soit plus petit que l'expression (8). Or cette expression (8) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G. Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre de gravité des $n + 2$ masses suivantes:

1° n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2° une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$;

3° une masse égale à -1 située au point λ_1.

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ_1'.

Composons d'abord les $n+1$ premières masses; nous obtiendrons une masse:

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point G' et comme ces $n+1$ premières masses sont positives, le point G' sera située à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les $n+1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad +\sqrt{-1},$$

et le second les $n+1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance OG' une limite inférieure μ et écrire:

$$OG' > \mu.$$

Il reste à composer la masse M située en G' et la masse -1 située en λ_1. On obtiendra ainsi une masse $M-1$ située en G. On aura évidemment:

$$OG > OG' - GG',$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1},$$

d'où

$$OG > OG'\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}.$$

Si donc:

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité

$$(9) \qquad OG > \frac{\mu}{2}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (9) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante:

Pour que l'équation (3) *admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t, il suffit:*

1° *qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine,*

2° *qu'il n'y ait entre les quantités λ aucune relation de la forme*

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1,$$

les α étant entiers positifs et β entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation:

$$(10) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = 0,$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (3).

Considérons en outre l'équation:

$$(3) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation:

$$(11) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z.$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (3) admettra une intégrale

$$z = T_1$$

où T_1 est ordonné suivant les puissances des x et périodique par rapport à t.

De même l'équation (11) admettra une intégrale

$$z = T_2$$

où T_2 est de même forme que T_1.

On en conclut que l'équation (10) admet comme intégrale particulière:

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Comme on peut dans le second membre de (3) remplacer successivement $\lambda_1 z$, par $\lambda_2 z, \lambda_3 z, \ldots, \lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n - 1$ équations analogues à l'équation (11), on peut conclure que l'équation (10) admet $n - 1$ intégrales particulières

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}, \; T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}}, \; \ldots, \; T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$$

où $T_2, T_3, \ldots, T_n$ sont de même forme que T_1.

Pour avoir l'intégrale générale de (10), il faudrait posséder encore une n^e intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation:

$$(12) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z.$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en conclurons que l'équation (10) admet comme intégrales particulières

$$T_1 e^{-\lambda_1 t}, \; T_2 e^{-\lambda_2 t}, \; \ldots, \; T_n e^{-\lambda_n t},$$

de sorte que l'intégrale générale de cette équation (10) sera:

$$z = \text{ fonction arbitraire de } (T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \ldots, T_n e^{-\lambda_n t}).$$

En d'autres termes les équations différentielles:

$$(10') \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

admettront comme intégrale générale

$$T_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad T_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad T_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 70 de ma thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

en fonctions des $n-p$ autres à savoir

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$$

et de t, à l'aide des équations suivantes:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_1}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_1}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_1}{dx_n} = X_1, \\ &\frac{dx_2}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_2}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_2}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_2}{dx_n} = X_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_p}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_p}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_p}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_p}{dx_n} = X_p. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que l'intégrale générale des équations (13) s'écrira:

$$(14) \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ représentant p fonctions arbitraires de

$$T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \ldots, T_n e^{-\lambda_n t}.$$

Prenons en particulier:

$$\varphi_1 = T_1 e^{-\lambda_1 t}, \qquad \varphi_2 = T_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \varphi_p = T_p e^{-\lambda_p t}.$$

Les équations (14) s'écriront:

$$(14') \qquad T_1 = T_2 = \ldots = T_p = 0.$$

Des équations (14') on pourra tirer $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonctions de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et t et on verra que ce sont des fonctions holomorphes par rapport à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et périodiques par rapport à t.

Donc les équations (13) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ce théorème est démontré quand les λ satisfont aux conditions énoncées plus haut; voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la 4^{me} partie de mes recherches sur les *courbes définies par les équations différentielles* (Journal de Liouville, 4^{me} série, T. 2, pages 156—157).

Proposons-nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe des équations (13) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (13) sous la forme suivante:

$$(13') \qquad \frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1} x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2} x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i$$
$$= Y_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

Soit:

$$Y = \sum C_{\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} e^{\beta\sqrt{-1}t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les p fonctions

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

sous la forme

$$(15) \qquad x_i = \sum A_{i, \beta, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Pour calculer les coefficients A par récurrence, substituons les séries (15) dans les équations (13′) et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i.\beta.\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n}$ l'équation suivante:

$$A_{i.\beta.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}(\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i)$$
$$= P[C, (-C''), A],$$

$P[C, (-C''), A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients C de

$$Y_{p+1}, \; Y_{p+2}, \ldots, \; Y_n,$$

aux coefficients C'' de Y_i changés de signe et aux coefficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients A ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme:

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0 \tag{16}$$

où les α sont entiers positifs et β entier positif ou négatif.

Cela posé soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite:

$$Y_i' = \sum \left| C_{i.\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \right| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour

$$i = p+1, p+2, \ldots, n$$

et

$$Y_i' = -\sum \left| C_{i.\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \right| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Formons les équations

$$\lambda' x_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda' x_n\frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i \tag{13''}$$
$$= Y'_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y'_n\frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i. \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Cherchons à satisfaire aux équations $(13'')$ à l'aide de séries de la forme suivante

$$(15') \qquad x_i = \sum B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Les coefficients B nous seront donnés par les équations suivantes:

$$B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_n}[\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1)] = P[|C|, |C'|, B]$$

où $P[|C|, |C'|, B]$ diffère de $P[C, (-C'), A]$ en ce que les coefficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coefficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que:

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1) < |\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i|.$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (15) sera plus petit que le terme correspondant de la série $(15')$ et comme cette dernière converge, la série (15) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours:

$$\lambda' < \left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n - 1}\right|$$

c'est à dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, qu'aucun des deux *polygones convexes* circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine.

Si donc aucun de ces deux polygones convexes ne contient l'origine, s'il n'y a entre les λ aucune relation de la forme (16), les équations (13) admettront une intégrale particulière de la forme suivante:

$$x_1 = \varphi_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t),$$
$$x_2 = \varphi_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_p = \varphi_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t),$$

les φ étant développables suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et les sinus et cosinus des multiples de t.

Cela posé, envisageons les équations:

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{10''}$$

Ces équations sont de même forme que les équations (10'); la seule différence, c'est que les λ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (10''), mais une solution contenant $n - p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (10''), je considère en particulier les suivantes:

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n. \tag{17}$$

J'écris en outre les équations:

$$x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t), \qquad (i=1,2,\ldots,p) \tag{18}$$

les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (13) définies plus haut.

Il est évident que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (17) et (18), elles satisferont également aux équations (10'').

Dans les équations (17) substituons à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ leurs valeurs (18), ces équations deviendront:

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n,$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \ldots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, dont tous les termes sont du 2^d degré au moins et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Ces équations (19) sont de la même forme que les équations (10'); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante:

$$T''_{p+1} = K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, \qquad T''_{p+2} = K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \quad \ldots, \quad T''_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

où $K_{p+1}, \ldots, K_n$ sont des constantes d'intégration, où $T''_{p+1}, \ldots, T''_n$ sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t.

Les équations

$$(20) \qquad \begin{aligned} T_i &= 0, & (i=1,2,\ldots p) \\ T''_q &= K_q e^{\lambda_q t}, & (q=p+1, p+2, \ldots, n) \end{aligned}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (10'') dépendant des $n-p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \ldots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (20) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on trouve ainsi:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \\ x_2 &= \psi_2(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \psi_n(t, K_{p+1}, \ldots, K_n), \end{aligned}$$

les ψ étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \ldots, K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (16).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci:

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45e Cahier du Journal de l'Ecole polytechnique et M. PICARD y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes rendus 1878).

§ 4. *Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.*

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p - 2$ premières dérivées et si sa $p - 1$e dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quelque grand que soit n,

$$n^p A_n | < K, \qquad | n^p B_n | < K.$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que:

$$| n^2 A_n | < K, \qquad | n^2 B_n | < K.$$

Il résulte de là que la série

$$| A_0 | + | A_1 | + | A_2 | + \ldots + | A_n | + \ldots$$
$$+ | B_1 | + | B_2 | + \ldots + | B_n | + \ldots$$

converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{1.1}x_1 + \varphi_{1.2}x_2 + \ldots + \varphi_{1.n}x_n,\\
\frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{2.1}x_1 + \varphi_{2.2}x_2 + \ldots + \varphi_{2.n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt} &= \varphi_{n.1}x_1 + \varphi_{n.2}x_2 + \ldots + \varphi_{n.n}x_n.
\end{aligned}
$$

Les n^2 coefficients $\varphi_{i.k}$ sont des fonctions de t périodiques et de période 2π.

Les équations (2) ne changent donc pas quand on change t en $t + 2\pi$. Cela posé soient:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{llll}
x_1 = \psi_{1.1}(t), & x_2 = \psi_{1.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{1.n}(t),\\
x_1 = \psi_{2.1}(t), & x_2 = \psi_{2.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{2.n}(t),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_1 = \psi_{n.1}(t), & x_2 = \psi_{n.2}(t), & \ldots, & x_n = \psi_{n.n}(t)
\end{array}
$$

n solutions, linéairement indépendantes, des équations (2).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t + 2\pi$ et les n solutions deviendront:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = \psi_{1.1}(t + 2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{1.n}(t + 2\pi),\\
x_1 = \psi_{2.1}(t + 2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{2.n}(t + 2\pi),\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
x_1 = \psi_{n.1}(t + 2\pi), & \ldots, & x_n = \psi_{n.n}(t + 2\pi).
\end{array}
$$

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (3) de sorte qu'on aura:

$$
\begin{aligned}
\psi_{1.1}(t + 2\pi) &= A_{1.1}\psi_{1.1}(t) + A_{1.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{1.n}\psi_{n.1}(t),\\
\psi_{2.1}(t + 2\pi) &= A_{2.1}\psi_{1.1}(t) + A_{2.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{2.n}\psi_{n.1}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi_{n.1}(t + 2\pi) &= A_{n.1}\psi_{1.1}(t) + A_{n.2}\psi_{2.1}(t) + \ldots + A_{n.n}\psi_{n.1}(t),
\end{aligned}
$$

les A étant des coefficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients)

$$\psi_{1.2}(t + 2\pi) = A_{1.1}\psi_{1.2}(t) + A_{1.2}\psi_{2.2}(t) + \ldots + A_{1.n}\psi_{n.2}(t)$$

etc.

Cela posé formons l'équation en S:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A_{1.1} - S & A_{1.2} & \ldots & A_{1.n} \\ A_{2.1} & A_{2.2} - S & \ldots & A_{2.n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n.1} & A_{n.2} & \ldots & A_{n.n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coefficients constants

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

tels que si l'on pose:

$$\theta_{1.1}(t) = B_1\psi_{1.1}(t) + B_2\psi_{2.1}(t) + \ldots + B_n\psi_{n.1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1.i}(t) = B_1\psi_{1.i}(t) + B_2\psi_{2.i}(t) + \ldots + B_n\psi_{n.i}(t)$$

on ait:

$$\theta_{1.1}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1.1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1.i}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1.i}(t).$$

Posons:

$$S_1 = e^{2a_1\pi},$$

il viendra:

$$e^{-a_1(t+2\pi)}\theta_{1.1}(t + 2\pi) = S_1 e^{-2a_1\pi}e^{-a_1 t}\theta_{1.1}(t) = e^{-a_1 t}\theta_{1.1}(t).$$

Cette équation exprime que:

$$e^{-a_1 t}\theta_{1.1}(t)$$

est une fonction périodique que nous pourrons développer en une série trigonométrique:

$$\lambda_{1.1}(t).$$

Si les fonctions périodiques $\varphi_{i.k}(t)$ sont analytiques, il en sera de même des solutions des équations différentielles (2) et de $\lambda_{1.1}(t)$. La série $\lambda_{1.1}(t)$ sera donc absolument et uniformément convergente.

De même

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.i}(t)$$

sera une fonction périodique qu'on pourra représenter par une série trigonométrique:

$$\lambda_{1.i}(t).$$

Nous avons donc une solution particulière des équations (2) qui s'écrit:

$$x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.1}(t), \qquad x_2 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.2}(t), \quad \dots, \quad x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.n}(t). \tag{6}$$

A chaque racine de l'équation (5) correspond une solution de la forme (6).

Si l'équation (5) a toutes ses racines distinctes, nous aurons n solutions de cette forme linéairement indépendantes et la solution générale s'écrira:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.1}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.1}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.1}(t), \\ x_2 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.2}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.2}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.2}(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.n}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.n}(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Les C sont des constantes d'intégration, les α sont des constantes et les λ sont des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes.

Voyons maintenant ce qui arrive quand l'équation (5) a une racine double, par exemple quand $\alpha_1 = \alpha_2$. Reprenons la formule (7), faisons-y

$$C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1. Il vient:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}[C_1\lambda_{1.1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2.1}(t)]$$

ou en posant

$$C_1 = C'_1 - C_2,$$

$$C_2 = \frac{C'_2}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

il viendra:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1.1}(t) + C_2'\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right].$$

Il est clair que la différence

$$\lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)$$

s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrons donc poser:

$$\lambda_{2.1}(t) = \lambda_{1.1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda'(t).$$

Il vient ainsi:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1.1} + C_2'\lambda_{1.1}\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C_2'\lambda'(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\right]$$

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$);

$$x_1 = C_1'e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.1} + C_2'e^{\alpha_1 t}[t\lambda_{1.1} + \lim \lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante:

$$e^{\alpha_1 t}t\lambda(t),$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme:

$$e^{\alpha_1 t}t^2\lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. Floquet, Callandreau, Bruns, Stieltjes et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ 5. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} \xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} \eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} \xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k} \eta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} \xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} \eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} \xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k} \eta'_k. \end{aligned} \tag{2'}$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par η_i', $-\xi_i'$, $-\eta_i$, ξ_i et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra:

$$\sum_i \left(\eta_i' \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i' \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i'}{dt} + \xi_i \frac{d\eta_i'}{dt}\right) =$$

$$\sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta_i' \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta_i' \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_k \xi_i' \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi_i' \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

$$-\sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi_k' \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta_k' \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_i \xi_k' \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta_i' \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

ou

$$\sum \frac{d}{dt}[\eta_i' \xi_i - \xi_i' \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta_1' \xi_1 - \xi_1' \eta_1 + \eta_2' \xi_2 - \xi_2' \eta_2 + \ldots + \eta_n' \xi_n - \xi_n' \eta_n = \text{constante.}$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2)

$$\xi_i, \xi_i', \xi_i'', \xi_i''',$$

$$\eta_i, \eta_i', \eta_i'', \eta_i'''.$$

Considérons ensuite la somme des déterminants:

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix},$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants:

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} |\xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_p} \eta_{\alpha_p}|,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i, \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir:

$$\sum \xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i = \text{const.}$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\sum A_i \xi_i + \sum B_i \eta_i = \text{const.}$$

une intégrale des équations (2), on devra avoir:

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i \left[\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k\right]$$
$$-\sum_i B_i \left[\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k\right] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k\, dx_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k\, dx_i} B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dy_i} B_k,$$

ce qui montre que:

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant:

$$\Phi(x_i, y_i, t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent:

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum \left(\frac{d\Phi}{dx_i} \frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i} \frac{d\Phi_1}{dx_i} \right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de POISSON.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice:

$$x_{1i}, \; x_{2i}, \; x_{3i},$$

le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du i^e point matériel. On aura alors:

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives:

$$F = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_{ki}}{dt} \right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite:

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$(4) \qquad F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const.}$$

et

$$(1') \qquad \frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}.$$

Soit:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t) \tag{5}$$

une solution de ces équations (1'), une autre solution sera:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t + h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t + h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations (2') qui correspondent à (1') comme les équations (2) correspondent à (1):

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i\varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires (2').

Connaissant une solution:

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (4).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (5) une autre solution:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k, \\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t), \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2')

$$\xi_{1i} = 1, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0,$$

$$\xi_{1i} = t, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \qquad \eta_{1i} = m_i.$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2′)

$$\Sigma_i \eta_{1i} = \text{const.},$$

$$\Sigma \eta_{1i} t - \Sigma m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité:

$$\Sigma m_i x_{1i} = t \Sigma y_{1i} + \text{const.},$$

$$\Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

Si l'on fait tourner la solution (5) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution:

$$x_{1i} = \varphi_{1i} \cos\omega - \varphi_{2i} \sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i} \cos\omega - \varphi'_{2i} \sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i} \sin\omega + \varphi_{2i} \cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i} \sin\omega + \varphi'_{2i} \cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de (2′)

$$\xi_{1i} = -x_{2i}, \qquad \eta_{1i} = -y_{2i},$$

$$\xi_{2i} = x_{1i}, \qquad \eta_{2i} = y_{1i},$$

$$\xi_{3i} = 0, \qquad \eta_{3i} = 0,$$

d'où l'intégrale de (2′)

$$\Sigma_i (x_{1i} \eta_{2i} - y_{1i} \xi_{2i} - x_{2i} \eta_{1i} + y_{2i} \xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de (1′)

$$\Sigma (x_{1i} y_{2i} - x_{2i} y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x ce qui est le cas de la nature.

Les équations (1′) ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3,

les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante:

$$x_{\lambda i} = \lambda^2 \varphi_{\lambda i}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{\lambda i} = \lambda^{-1} m_i \varphi'_{\lambda i}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations (2')

$$\xi_{\lambda i} = 2\varphi_{\lambda i} - 3t\varphi'_{\lambda i}, \qquad \eta_{\lambda i} = -m_i\varphi'_{\lambda i} - 3m_i t\varphi''_{\lambda i},$$

ou

(6) $$\xi_{\lambda i} = 2x_{\lambda i} - 3t\frac{y_{\lambda i}}{m_i}, \qquad \eta_{\lambda i} = -y_{\lambda i} - 3t\frac{dV}{dx_{\lambda i}},$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2'), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1'):

$$\sum(2x_{\lambda i}\eta_{\lambda i} + y_{\lambda i}\xi_{\lambda i}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{\lambda i}\eta_{\lambda i}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{\lambda i}}\xi_{\lambda i}\right)\right] + \text{const.}$$

§ 6. *Définition des invariants intégraux.*

Considérons un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait:

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i,$$

X'_i étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x', une relation:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminée.

Si donc nous savons que nos points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante:

$$\int(Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \ldots + Y_n dx_n) = \int \Sigma Y_i dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équations différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\Sigma Y_{ik} dx_i dx_k},$$

étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient definis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide

le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est à dire l'intégrale triple:

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et que l'on ait la relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la dynamique; car si l'on considère ces équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que:

$$\sum (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Cela traduit dans notre nouveau langage signifie que l'intégrale double

$$\iint \sum_i dx_i\,dy_i$$

est un invariant intégral, ainsi que je le démontrerai plus loin.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante.*

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

Il y a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. Je démontrerai plus loin que l'expression

$$\int \sum (2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1^{er} ordre, du 2^{d} ordre, ... ou du n^{e} ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

Il me reste à démontrer les divers resultats que je viens d'énoncer; cette démonstration peut se faire par un calcul très simple.

Soit:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1}$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que:

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0. \tag{2}$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Cette solution écrira:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\alpha_1} & \frac{dx_2}{d\alpha_1} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_1} \\ \frac{dx_1}{d\alpha_2} & \frac{dx_2}{d\alpha_2} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_1}{d\alpha_n} & \frac{dx_2}{d\alpha_n} & \cdots & \frac{dx_n}{d\alpha_n} \end{vmatrix}$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

et

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la k^e colonne duquel on a remplacé:

$$\frac{dx_k}{d\alpha_1}, \frac{dx_k}{d\alpha_2}, \ldots, \frac{dx_k}{d\alpha_n}$$

par

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_1 dt}, \frac{d^2x_k}{d\alpha_2 dt}, \ldots, \frac{d^2x_k}{d\alpha_n dt}.$$

Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k,$$

d'où:

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_i dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha_i} + \frac{dX_k}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha_i}.$$

On déduit de là:

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k}.$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

$$= \int \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = 0.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons:

(2′) $$\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je dis que

$$J = \int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int M \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Il faut montrer que:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

On a en effet (en vertu des équations (1))

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et (d'après ce que nous venons de voir):

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} \right).$$

Il vient donc:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} \right) = 0.$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux équations de la dynamique.

Soient les équations

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta),$$

$$y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta).$$

Je dis que:

$$J = \int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n) = \int \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha}\right) d\alpha d\beta$$

est une constante.

Il vient en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) d\alpha d\beta.$$

Il vient ensuite:

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\beta} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta}.$$

On conclut de là que:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right)$$

$$= \sum\sum \left(\frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_k}{d\alpha}\right).$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β, on a donc:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) = \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha}\right).$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la dynamique, mais en posant:

$$F = T + U,$$

T ne dependant que des y et U des x seulement. De plus T est homogène de degré 2 et U homogène de degré -1.

Prenons une solution

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha), \qquad y_i = \psi_i(t, \alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α.

Considérons l'intégrale simple:

$$J = \int \sum \left(2x_i \frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{dx_i}{d\alpha}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)t,$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(2 \frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dx_i}{d\alpha} + 2x_i \frac{d^2 y_i}{dt\, d\alpha} + y_i \frac{d^2 x_i}{dt\, d\alpha}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Il vient:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt\, d\alpha} = \sum_k \frac{d^2 T}{dy_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2 y_i}{dt\, d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2 U}{dx_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \sum \left(2 \frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{d^2 T}{dy_i\, dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha} - \frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dU}{dx_i} - 2x_i \frac{d^2 U}{dx_i\, dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a:

$$\sum_i y_i \frac{d^2 T}{dy_i\, dy_k} = \frac{dT}{dy_k}, \qquad \sum_i x_i \frac{d^2 U}{dx_i\, dx_k} = -2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3 \frac{dT}{dy_i} \frac{dy_i}{d\alpha} + 3 \frac{dU}{dx_i} \frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3 \int (dT + dU) + 3(C_1 - C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

§ 7. *Transformation des invariants intégraux.*

Reprenons nos équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \dots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0.$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M\Delta dz_1 dz_2 \ldots dz_n.$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront:

$$(4) \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1}, \quad \frac{dz_n}{dt} = Z_n = 0,$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n - 1$ et s'écrivent:

$$(4') \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

les équations (4) admettront également un invariant positif:

$$J = \int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1} dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4′) qui sont d'ordre $n - 1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n - 1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_n)}{dz_n} = 0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_{n-1}} = 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n - 1$

$$\int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

est un invariant pour les équations (4′).

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais nous avons conservé le temps t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose:

$$t = \varphi(t_1)$$

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors:

$$\frac{dx_i}{dt_1} = X_i' = X_i \frac{d\varphi}{dt_1} = X_i \frac{dt}{dt_1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M \frac{dt_1}{dt} X_i'\right) = 0.$$

Cela montre que

$$\int M \frac{dt_1}{dt} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante:

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \quad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral:

$$\int MX_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante:

$$t_1 = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira:

$$\int M\left(\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{d\theta}{dx_n} X_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral est beaucoup plus profondément modifiée quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 \lesseqgtr 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si on considère une courbe C tracée sur S, les n^{es} conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C' que j'appellerai la n^e *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est n^e conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C' et A' les premières conséquentes, C^n et A^n les n^{es} conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C'. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A'. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\theta + \frac{d\theta}{dn} dn$ la valeur de θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des θ croissants, on aura

$$\frac{d\theta}{dn} > 0.$$

Posons:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3}{\frac{d\theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH d\omega - \int_{A} MH d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A' et la seconde à l'aire A.

L'intégrale

$$\int MH d\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A''. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ 8. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un

autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité. Lorsqu'il a démontré que, si l'on tient compte des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, il s'est seulement attaché à établir que les développements de ces grands axes en séries ne contiennent que des termes périodiques de la forme $\sin \alpha t$ ou $\cos \alpha t$, ou des termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ ou $t \cos \alpha t$, sans contenir aucun terme séculaire de la forme t ou t^2. Cela ne signifie pas que les grands axes ne peuvent jamais dépasser une certaine valeur, car un terme mixte $t \cos \alpha t$ peut croître au delà de toute limite; cela veut dire seulement que les grands axes repasseront une infinité de fois par leur valeur primitive.

La stabilité, au sens de Poisson, peut-elle appartenir à toutes les solutions? Poisson ne le croyait pas, car sa démonstration suppose expressément que les moyens mouvements ne sont pas commensurables; elle ne s'applique donc pas quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

L'existence des solutions asymptotiques, que nous établirons plus loin, montre suffisamment que si la position initiale du point P est convenablement choisie, ce point P ne repassera pas une infinité de fois aussi près que l'on voudra de cette position initiale.

Mais je me propose d'établir que, dans un des cas particuliers du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières) de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

En d'autres termes, il y aura une infinité de solutions particulières du problème qui ne jouiront pas de la stabilité au second sens du mot, c'est à dire au sens de Poisson; mais il y en aura une infinité qui en jouiront. J'ajouterai que les premières peuvent être regardées comme exceptionnelles et je chercherai plus loin à faire comprendre le sens précis que j'attache à ce mot.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps 0 la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n. Je puis supposer que τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grande que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0\,,\; r_{p_2-p_1}\,,\; r_{p_3-p_1}\,,\; \ldots\,,\; r_{p_n-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. Par analogie avec la nomenclature du paragraphe précédent nous conviendrons de dire que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r'_0 cette partie commune; soit s'_0 la p^e antécédente de r'_0 qui fera aussi partie de r_0 puisque sa p^e conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r'_{p_1} la première des conséquentes de r'_0 qui ait une partie commune avec r'_0; soit r''_0 cette partie commune; sa p_1^e antécédente fera partie de r'_0 et par conséquent de r_0, et sa $p + p_1^e$ antécédente que j'appellerai s''_0 fera partie de s'_0 et par conséquent de r_0.

Ainsi s''_0 fera partie de r_0 ainsi que ses p^e et $p + p_1^e$ conséquentes.

Et ainsi de suite.

Avec r''_0 nous formerons r'''_0 comme nous avons formé r''_0 avec r'_0 et r'_0 avec r_0; nous formerons ensuite $r^{\mathrm{IV}}_0, \ldots, r^n_0, \ldots$.

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r^n_0 qui ait une partie commune avec r^n_0 soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s^n_0 l'antécédente d'ordre $p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ de r^n_0.

Alors s^n_0 fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre:

$$p\,,\, p + p_1\,,\, p + p_1 + p_2\,, \ldots,\, p + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

De plus s^n_0 fera partie de s^{n-1}_0, s^{n-1}_0 de $s^{n-2}_0, \ldots$.

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0, s'_0, s''_0, \ldots, s^n_0, s^{n+1}_0, \ldots$ ad. inf. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre $p, p + p_1, \ldots, p + p_1 + \cdots + p_n, p + p_1 + \cdots + p_n + p_{n+1}, \ldots$ ad. inf.

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0.

C. Q. F. D.

Corollaire. Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.

Cette expression n'ayant par elle-même aucun sens précis, je suis obligé d'abord d'en compléter la définition.

Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la position initiale du point mobile P appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r'_0 dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r'_0.

Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles.

Je suppose que la position initiale du point P appartienne à r_0 et je me propose de calculer la probabilité pour que la trajectoire issue de ce point ne traverse pas $k+1$ fois la région r_0 depuis l'époque o jusqu'à l'époque $n\tau$.

Nous avons vu que si le volume v de r_0 est tel que:

$$n > \frac{kV}{v}$$

on pourra trouver $k+1$ régions que j'appellerai

$$r_0, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_k}$$

et qui auront une partie commune. Soit s_{α_k} cette partie commune, soit s_0 son antécédente d'ordre α_k; et désignons par s_p la p^e conséquente de s_0.

Je dis que si la position initiale du point P appartient à s_0, la trajectoire issue de ce point traversera $k+1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque o et l'époque $n\tau$.

En effet le point mobile qui décrit cette trajectoire se trouvera à l'époque o dans la région s_0, à l'époque $p\tau$ dans la région s_p, à l'époque

$n\tau$ dans la région s_n. Il traversera donc nécessairement, entre les époques o et $n\tau$, les régions suivantes:

$$s_0\,,\; s_{\alpha_k-\alpha_{k-1}}\,,\; s_{\alpha_k-\alpha_{k-2}}\,,\; \ldots\,,\; s_{\alpha_k-\alpha_2}\,,\; s_{\alpha_k-\alpha_1}\,,\; s_{\alpha_k}.$$

Or je dis que toutes ces régions font partie de r_0. En effet s_{α_k} fait partie de r_0 par définition; s_0 fait partie de r_0 parce que sa α_k^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_k}, et en général $s_{\alpha_k-\alpha_i}$ fera partie de r_0 parce que sa α_i^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_i}:

Donc le point mobile traversera $k+1$ fois au moins la région r_0.

C. Q. F. D.

Soit maintenant σ_0 la portion de r_0 qui n'appartient ni à s_0, ni à aucune région analogue, de telle façon que les trajectoires issues des divers points de σ_0 ne traversent pas la région r_0 au moins $k+1$ fois entre les époques o et $n\tau$. Soit w le volume de σ_0.

La probabilité cherchée, c'est à dire la probabilité pour que notre trajectoire ne traverse pas $k+1$ fois r_0 entre ces deux époques sera alors $\frac{w}{v}$.

Or par hypothèse aucune trajectoire issue de σ_0 ne traverse $k+1$ fois r_0 ni a fortiori σ_0 entre ces deux époques. On a donc:

$$w < \frac{kV}{n}$$

et notre probabilité sera plus petite que

$$\frac{kV}{nv}.$$

Quelque grand que soit k, quelque petit que soit v, on pourra toujours prendre n assez grand pour que cette expression soit aussi petite que nous le voudrons. Donc il y a une probabilité nulle pour que notre trajectoire, que nous savons issue d'un point de r_0, ne traverse pas cette région plus de k fois depuis l'époque o jusqu'à l'époque $+\infty$.

C. Q. F. D.

Extension du théorème I. Nous avons supposé:

1° que $n = 3$,

2° que le volume est un invariant intégral,

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque:

$$\int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il est encore vrai si $n > 3$, s'il existe un invariant positif:

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

et si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus.

Supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que:

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la lune a négligé dans une première approximation la parallaxe du soleil, l'excentricité du soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale:

$$F = \frac{x'^2+y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2}n'^2x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral

$$\int dx\,dy\,dx'\,dy'.$$

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 4 dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini, comme nous allons le montrer.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est à dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région.

Soit donc à calculer l'intégrale quadruple

$$J = \int dx\,dy\,dx'\,dy',$$

cette intégrale étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$C_1 < F < C_2.$$

Changeons de variables et transformons notre intégrale quadruple, en posant:

$$x' = \cos\varphi\sqrt{2r}, \qquad y' = \sin\varphi\sqrt{2r},$$

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega;$$

cette intégrale devient:

$$J = \int \rho d\rho dr d\omega d\varphi$$

et il vient d'autre part:

$$F = r - \frac{\mu}{\rho} - \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega .$$

Nous devons intégrer d'abord par rapport à φ entre les limites o et 2π, ce qui donne:

$$J = 2\pi \int \rho d\rho dr d\omega$$

et l'intégration doit être étendue à tous les systèmes de valeurs de ρ, r et ω qui satisfont aux inégalités:

$$(1) \qquad \begin{gathered} r > 0 \, , \; r > C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega , \\ r < C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega . \end{gathered}$$

De ces inégalités on peut déduire la suivante:

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega > 0 .$$

Regardons ρ et ω comme les coordonnées polaires d'un point et construisons la courbe

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega = 0 .$$

Nous verrons que si C_2 est plus petit que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$ cette courbe se compose d'une ovale fermée située tout entière à l'intérieur du cercle

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$$

et de deux branches infinies situées tout entières à l'extérieur de ce cercle.

Le lecteur fera facilement cette construction; s'il y éprouvait quelque difficulté, je le renverrais au mémoire original de M. Hill dans le tome I de l'American Journal of Mathematics.

M. Hill conclut de là que si le point ρ, ω est à l'origine des temps à l'intérieur de cette ovale fermée, il y restera toujours; que par consé-

quent ρ restera toujours plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$. Ainsi si l'on négligeait la parallaxe du soleil, son excentricité et les inclinaisons, il serait permis d'assigner une limite supérieure au rayon vecteur de la lune. En ce qui concerne la lune en effet, la constante C_2 est plus petite que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$.

C'est ce remarquable résultat de M. HILL que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la lune jouirait également de la stabilité au sens de POISSON; je veux dire par là que, si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles, la lune repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position primitive. C'est pour cela, comme je l'ai expliqué plus haut, que je me propose de démontrer que l'intégrale J est finie.

Comme ρ est plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$ et par conséquent limité, l'intégrale:

$$J = 2\pi\int \rho d\rho dr d\omega$$

ne peut devenir infinie que si r croît indéfiniment, et r ne peut devenir infini, en vertu des inégalités (1) que si ρ s'annule.

Posons donc:

$$J = J' + J''.$$

J' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$r > 0\,,\ \rho > \rho_0\,,\ C_1 < F < C_2 \tag{2}$$

et J'' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$r > 0\,,\ \rho < \rho_0\,,\ C_1 < F < C_2. \tag{3}$$

Quand les inégalités (2) sont satisfaites ρ ne peut s'annuler; donc r ne peut devenir infini. Donc la première intégrale J' est finie.

Examinons maintenant J''. Je puis supposer que ρ_0 a été pris assez petit pour que

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho_0} > 0.$$

Les inégalités $F > C_1$, $\rho < \rho_0$ entraînent alors $r > 0$. Nous devons donc intégrer par rapport à r entre les limites:

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega \quad \text{et} \quad C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega .$$

Il vient alors:

$$J'' = 2\pi(C_2 - C_1)\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho_0} \rho d\rho = 2\pi^2 \rho_0^2 (C_2 - C_1).$$

J'' et par conséquent J est donc fini.

C. Q. F. D.

M. Bohlin a généralisé de la manière suivante le résultat de M. Hill. Considérons le cas particulier suivant du problème des trois corps. Soit A un corps de masse $1 - \mu$, B un corps de masse μ et C un corps de masse infiniment petite. Imaginons que les deux corps A et B (dont le mouvement doit être Képlerien, puisqu'il n'est pas troublé par la masse de C) décrivent autour de leur centre de gravité commun supposé fixe deux circonférences concentriques, et que C se meuve dans le plan de ces deux circonférences. Je prendrai pour unité de longueur la distance constante AB, de telle façon que les rayons de ces deux circonférences soient $1 - \mu$ et μ. Je supposerai que l'unité de temps ait été choisie de telle sorte que la vitesse angulaire des deux points A et B sur leurs circonférences soit égale à 1 (ou ce qui revient au même que la constante de Gauss soit égale à 1).

Choisissons alors deux axes mobiles ayant leur origine au centre de gravité des deux masses A et B; le premier de ces axes sera la droite AB, et le second sera perpendiculaire au premier.

Les coordonnées de A par rapport à ces deux axes sont $-\mu$ et 0; celles de B sont $1 - \mu$ et 0; quant à celles de C je les appelle x et y; j'ai alors pour les équations du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2y' + \frac{dV}{dx} + x,$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2x' + \frac{dV}{dy} + y,$$

en posant

$$V = \frac{1 - \mu}{AC} + \frac{\mu}{BC}.$$

On a d'ailleurs:

$$\overline{AC}^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \qquad \overline{BC}^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2.$$

Ces équations admettent une intégrale:

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - V - \frac{x^2 + y^2}{2} = K$$

et un invariant intégral:

$$J = \int dx dy dx' dy'.$$

M. Bohlin, dans le tome 10 des Acta mathematica, a généralisé le résultat de M. Hill, en montrant que si la constante K a une valeur convenable (ce que nous supposerons) et si les valeurs initiales de x et de y sont assez petites, ces quantités x et y resteront limitées.

Je me propose maintenant de montrer que l'intégrale J étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2$$

est finie; d'où nous pourrons conclure, comme nous l'avons fait plus haut, que la stabilité au sens de Poisson subsiste encore dans ce cas.

Si les constantes K_1 et K_2 sont convenablement choisies, le théorème de M. Bohlin montre que x et y seront limités. Quant à x' et y' ils ne pourront devenir infinis que si V devient infini, c'est à dire si AC s'annule, ou si BC s'annule.

Posons alors:

$$J = J' + J'' + J''',$$

l'intégrale J' étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2, \ \overline{AC}^2 > \rho_0^2, \ \overline{BC}^2 > \rho_0^2, \qquad \left(\rho_0 < \frac{1}{2}\right)$$

l'intégrale J'' à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2, \ \overline{AC}^2 < \rho_0^2, \quad (\text{d'où } \overline{BC}^2 > \rho_0^2),$$

et l'intégrale J''' à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2\,, \quad \overline{BC}^2 < \rho_0^2\,, \qquad (\text{d'où } \overline{AC}^2 > \rho_0^2).$$

Comme pour aucun des systèmes de valeurs auxquels l'intégrale J' est étendue, AC ou BC ne s'annule, cette intégrale J' est finie.

Examinons maintenant l'intégrale J''. Je puis supposer que ρ_0 ait été choisi assez petit pour que

$$\frac{1-\mu}{\rho_0} + K_1 > 0\,, \quad \frac{\mu}{\rho_0} + K_1 > 0.$$

Dans ce cas $\frac{x'^2 + y'^2}{2}$ peut varier entre les limites

$$L_1 = K_1 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{et} \quad K_2 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2+y^2}{2} = L_2,$$

car la plus petite de ces deux limites est positive.

Posons alors comme plus haut:

$$x' = \sqrt{2r}\cos\varphi\,, \qquad y' = \sqrt{2r}\sin\varphi\,, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{x'^2 + y'^2}{2}\,;$$

l'intégrale deviendra

$$J'' = \int dx\,dy\,dr\,d\varphi$$

et on devra intégrer par rapport à φ entre les limites 0 et 2π et par rapport à r entre les limites L_1 et L_2; il viendra donc:

$$J'' = 2\pi(K_2 - K_1)\int dx\,dy.$$

L'intégrale double $\int dx\,dy$ devra être étendue à tous les systèmes de valeurs tels que $\overline{AC}^2 < \rho_0^2$; elle est donc égale à $\pi\rho_0^2$; de sorte qu'il vient:

$$J'' = 2\pi^2\rho_0^2(K_2 - K_1).$$

J'' est donc fini, et il en est de même de J''' et de J.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que (si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles au sens donné à ce mot dans le corol-

laire du théorème I) le troisième corps C repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

Dans le cas général du problème des trois corps, on ne peut plus affirmer qu'il en sera encore de même.

Théorème II. Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a un invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface *fermée* sans contact.

Soit en effet

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression:

$$\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3$$

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn} dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura:

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de la traduire dans le langage analytique et de dire:

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui soit positive, qui devienne infinie toutes les fois que l'un des x cesse d'être fini et qui soit telle que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n} X_n$$

soit toujours de même signe quand F est nul.

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont je me suis servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. LINDSTEDT.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures, lui donner une forme un peu différente en y introduisant une notion nouvelle, celle des courbes invariantes.

Nous avons à la fin du paragraphe précédent envisagé une portion de surface S, définie par l'équation

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et telle que l'on ait pour tous les points de S

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 > 0,$$

de telle sorte que S soit une portion de surface sans contact.

Nous avons défini ensuite ce qu'on doit entendre par le n^e conséquent d'un point de S ou par la n^e conséquente d'une courbe ou d'une aire appartenant à S. J'entends maintenant et j'entendrai désormais le mot conséquent, dans le sens du paragraphe précédent, et non dans le sens employé plus haut dans la démonstration du théorème I.

Nous avons vu que s'il existe un invariant positif

$$\iiint M dx_1 dx_2 dx_3,$$

il existe également une autre intégrale

$$\int MH d\omega$$

que l'on doit étendre à tous les éléments $d\omega$ d'une aire appartenant à S et qui jouit des propriétés suivantes:

1°. La quantité sous le signe $\int$, MH est toujours positive.

2°. L'intégrale a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à S et pour toutes celles de ses conséquentes qui existent.

Cela posé, j'appellerai *courbe invariante* du n^e ordre, toute courbe tracée sur S et qui coïncidera avec sa n^e conséquente.

Dans la plupart des questions de dynamique il entre certains paramètres très petits de sorte qu'on est naturellement conduit à développer les solutions suivant les puissances croissantes de ces paramètres. Telles sont les masses en mécanique céleste.

Nous imaginerons donc que nos équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

dépendent d'un paramètre μ. Nous supposerons que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et μ, susceptibles d'être développées selon les puissances croissantes de μ et que μ est très petit.

Considérons alors une fonction quelconque de μ; je suppose que cette fonction tende vers 0 quand μ tend vers 0, de telle façon que le rapport de cette fonction à μ^n tende vers une limite finie. Je dirai que cette fonction de μ est une quantité très petite du n^e ordre.

Il importe de remarquer qu'il n'est pas nécessaire que cette fonction de μ soit susceptible d'être développée suivant les puissances de μ.

Cela posé, soient A_0 et B_0 deux points d'une surface sans contact S, et soient A_1 et B_1 leurs conséquents. Si la position de A_0 et B_0 dépend de μ suivant une loi quelconque il en sera de même de la position de A_1 et B_1. Je me propose de démontrer les lemmes suivants:

Lemme I. Si on envisage une portion de surface sans contact S, passant par le point a_0, b_0, c_0; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de S et si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de son conséquent, on pourra développer x_1, y_1, z_1 suivant les puissances de $x_0 - a_0$, $y_0 - b_0$, $z_0 - c_0$ et μ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Je puis toujours prendre pour origine le point a_0, b_0, c_0 de telle façon que

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0.$$

Si alors

$$z = \varphi(x, y)$$

est l'équation de la surface S; cette surface passera par l'origine O et on aura:

$$\varphi(0, 0) = 0.$$

Je supposerai de plus qu'en tous les points de la portion de surface S envisagée la fonction $\varphi(x, y)$ est holomorphe. Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

D'après la terminologie que nous avons adopté, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

En effet, d'après le théorème III § 2, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue

du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t-\tau$ sont suffisamment petits, on aura:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \psi_1(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\ y &= \psi_2(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\ z &= \psi_3(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\end{aligned}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t-\tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$, si $x-a$ et $y-b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons:

$$(5)\qquad \psi_3 = \psi_4.$$

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t-\tau$, μ, x_0, y_0 et z_0 et on peut chercher à la résoudre par rapport à $t-\tau$.

Pour:

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = 0.$$

D'après un théorème de Cauchy, que nous avons démontré dans un des paragraphes qui précèdent, on pourra tirer de la relation (5) $t-\tau$ sous la forme suivante:

$$(6)\qquad t-\tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point O pour $\mu = 0$ va *toucher* la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par θ et x, y, z par x_1, y_1, z_1; il viendra:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0), \\ y_1 &= \theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0), \\ z_1 &= \theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

θ_1, θ_2 et θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

C. Q. F. D.

Lemme II. Si la distance de deux points A_0 et B_0 appartenant à la portion de surface sans contact S est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a'_1, a'_2, a'_3 les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; y_1, y_2, y_3; y'_1, y'_2, y'_3 les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1.

D'après le lemme I $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2$, $x'_3 - a'_3$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ et μ.

L'expression de $y'_1 - a'_1$, $y'_2 - a'_2$, $y'_3 - a'_3$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2$, $y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2$, $x'_3 - a'_3$ en fonctions de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} x'_1 - y'_1 &= (x_1 - y_1)F_1 + (x_2 - y_2)F_2 + (x_3 - y_3)F_3, \\ x'_2 - y'_2 &= (x_1 - y_1)F'_1 + (x_2 - y_2)F'_2 + (x_3 - y_3)F'_3, \\ x'_3 - y'_3 &= (x_1 - y_1)F''_1 + (x_2 - y_2)F''_2 + (x_3 - y_3)F''_3, \end{aligned} \tag{7}$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu\,,\ x_1 - a_1\,,\ x_2 - a_2\,,\ x_3 - a_3\,,\ y_1 - a_1\,,\ y_2 - a_2\,,\ y_3 - a_3 .$$

Les quantités F_1', F_2', etc. sont finies; si donc $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ et $x_3 - y_3$ sont des quantités très petites d'ordre n, il en sera de même de $x_1' - y_1'$, $x_2' - y_2'$, $x_3' - y_3'$.

C. Q. F. D.

Théorème III. Soit A_1AMB_1B une courbe invariante, de telle façon que A_1 et B_1 soient les conséquents de A et B.

Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient très petits (c'est à dire tendent vers 0 avec μ) mais que leur courbure soit finie.

Je suppose que cette courbe invariante et la position des points A et B dépendent de μ suivant une loi quelconque. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif. Si la distance AB est très petite du n^e ordre et que la distance AA_1 ne soit pas très petite du n^e ordre, l'arc AA_1 coupe l'arc BB_1.

Fig. 1.

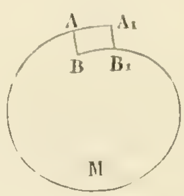
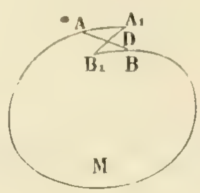


Fig. 2.



Je puis toujours joindre les points A et B par un arc de courbe AB situé tout entier sur la portion de surface sans contact S et dont la longueur totale soit du même ordre de grandeur que la distance AB, c'est à dire une quantité très petite du n^e ordre. Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB, il sera aussi très petit du n^e ordre d'après le lemme II.

Voici maintenant les diverses hypothèses que l'on peut concevoir:

1ère hypothèse. Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée.

2e hypothèse. Le quadrilatère curviligne AA_1B_1B est tel que les quatre arcs qui lui servent de côtés n'ont d'autre point commun que les quatre sommets A, A_1, B et B_1. C'est le cas de la figure 1.

3^e hypothèse. Les deux arcs AB et A_1B_1 se coupent. C'est le cas de la figure 2.

4^e hypothèse. L'un des arcs AB ou A_1B_1 coupe l'un des arcs AA_1 ou BB_1; mais les arcs AA_1 et BB_1 ne se coupent pas, non plus que les deux arcs AB et A_1B_1.

S'il y a un invariant positif il existera d'après le paragraphe précédent une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

dont tous les éléments seront positifs et qui devra avoir la même valeur pour l'aire ABB_1MA et pour sa conséquente AA_1B_1MA.

Cette intégrale étendue à l'aire

$$ABA_1B_1 = AA_1B_1MA - ABB_1MA$$

doit donc être nulle et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, la disposition ne peut être celle de la figure 1 où l'aire ABA_1B_1 est convexe.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

La disposition ne peut non plus être celle de la figure 2.

En effet dans le triangle ADA_1, les distances AD et A_1D sont très petites du n^e ordre car elles sont plus petites que les arcs AD et A_1D, lesquels sont plus petits que les arcs AB et A_1B_1 qui sont du n^e ordre. De plus on a:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

La distance AA_1 devrait donc être une quantité très petite du n^e ordre, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème.

La 3^e hypothèse doit donc être rejetée.

Je dis que la 4^e hypothèse ne peut non plus être acceptée. Supposons en effet par exemple que l'arc AB coupe l'arc AA_1 en un point A'. Soit ANA_1 la portion de l'arc AB qui va de A en A'; soit APA' la portion de l'arc AA_1 qui va de A en A'.

Je dis qu'on pourra remplacer l'arc $ANA'B$ par l'arc $APA'B$; et que le nouvel arc $APA'B$ sera comme l'arc primitif $ANA'B$ une quantité très petite du n^e ordre.

En effet l'arc ANA' est plus petit que AB, il est donc du n^e ordre;

la distance AA' est donc elle-même du n^e ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1 qui est très petit, c'est à dire qui tend vers o avec μ; l'arc APA' est donc très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA'; ce rapport est fini et AA' est du n^e ordre; donc APA' est du n^e ordre, c. q. f. d.

D'ailleurs le nouvel arc $APA'B$ ne coupe plus l'arc AA_1, il a seulement avec lui une partie commune APA'.

On retombe donc sur la 2^e hypothèse qui a déjà été rejetée.

La 1^ère hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque. — Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du n^e ordre, il en est de même de l'arc APA'.

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 9. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (1) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X pourront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.

Supposons que pour la valeur o du paramètre μ, ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π.

Posons:

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu \frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i. Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. Les équations sans second membre:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \xi_k \frac{dX_i}{dx_k} \tag{2}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π.

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai:

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π.

2°. Les équations sans second membre admettent une solution périodique de période 2π.

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante:

$$\xi_i = \mu t\psi_{1.i}(t) + \mu\psi_{0.i}(t),$$

les ψ étant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu[t^n\psi_{n.i}(t) + t^{n-1}\psi_{n-1.i}(t) + \dots + \psi_{0.i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près.

Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ; posons par conséquent:

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \dots$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i, on trouvera

$$X_i = X_{0.i} + \mu X_{1.i} + \mu^2 X_{2.i} + \dots$$

Il est clair que les $X_{0.i}$ ne dépendent que des φ_i, les $X_{1.i}$ des φ_i et des $\varphi_{1.i}$, les $X_{2.i}$ des $\varphi_{1.i}$ et des $\varphi_{2.i}$ etc. De plus si les $\varphi_{n.i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π, il en sera de même des $X_{n.i}$.

Nous avons de plus

$$X_{n.i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n.i}$ ne dépendra que des φ_i, des $\varphi_{1.i}$, des $\varphi_{2.i}, \dots,$ des $\varphi_{n-1.i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n.i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes

$$(3) \qquad \frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités

$$\varphi_{1.i}, \varphi_{2.i}, \dots, \varphi_{n-1.i}$$

à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n.i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coefficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n.k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \ldots.$$

dont les coefficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques, ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du »calcul des limites.»

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \beta_i + a_i\mu + \Sigma b_{ik}\beta_k + \Sigma[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]\mu^m\beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots\beta_n^{p_n} \\ &= \beta_i + \psi_i,\end{aligned}$$

les a, les b et les $[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]$ étant des coefficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où:

$$\gamma_i = \beta_i.$$

On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{4}$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables. (Voir théorème III § 2.)

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est à dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et on trouve comme solution:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. (Voir théorème IV § 2.)

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

Supposons maintenant que le déterminant fonctionnel des ψ soit nul; nous pourrons alors, en vertu du théorème VI § 2, éliminer entre les équations (4) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; nous arriverions ainsi à une équation unique

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera développé suivant les puissances de μ et de β_n.

Il n'y aurait d'exception que si les équations (4) n'étaient pas distinctes; mais dans ce cas nous leur adjoindrions une autre équation choisie arbitrairement.

Si l'on regarde μ et β_n comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation $\Phi = 0$ représente une courbe passant par l'origine. A chacun des points de cette courbe correspondra une solution périodique, de sorte que pour étudier les solutions périodiques qui correspondent aux petites valeurs de μ et des β, il nous suffira de construire la partie de cette courbe qui avoisine l'origine.

Si le déterminant fonctionnel des ψ est nul on aura, (pour $\mu = \beta_n = 0$):

$$\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, la courbe $\Phi = 0$ sera tangente à l'origine à la droite $\mu = 0$, ou bien encore pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ sera une équation en β_n qui admettra 0 comme racine multiple; j'appelle m l'ordre de multiplicité de cette racine.

En vertu du théorème V § 2 on pourra trouver m séries développées suivant les puissances fractionnaires et positives de μ, s'annulant avec μ et qui substituées à la place de β_n satisfassent à l'équation $\Phi = 0$.

Considérons l'intersection de la courbe $\Phi = 0$ ou plutôt de la portion de cette courbe qui avoisine l'origine avec deux droites $\mu = \varepsilon, \mu = -\varepsilon$ très voisines de la droite $\mu = 0$. On obtiendra les points d'intersection en faisant $\mu = \varepsilon$, puis $\mu = -\varepsilon$ dans les m séries dont je viens de parler.

Soit m_1 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = +\varepsilon$ réels et voisins de l'origine. Soit m_2 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = -\varepsilon$ réels et voisins de l'origine.

Les trois nombres m, m_1 et m_2 seront de même parité.

Si donc m est impair, m_1 et m_2 seront au moins égaux à 1. Donc il existera des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, tant positives que négatives.

Comment une solution périodique peut-elle disparaître quand on fait varier μ d'une manière continue? Comment peut-il se faire que le nombre des solutions pour $\mu = +\varepsilon$ soit plus petit que pour $\mu = -\varepsilon$, que $m_1 < m_2$?

J'observe d'abord qu'une solution périodique ne peut disparaître quand μ passe de la valeur $-\varepsilon$ à la valeur $+\varepsilon$ que si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet une racine multiple; en d'autres termes *une solution périodique ne peut disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.* De plus m_1 et m_2 étant de même parité, la différence $m_2 - m_1$ est toujours paire.

Donc les solutions périodiques disparaîssent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.

Un cas particulier intéressant est celui où pour $\mu = 0$, les équations différentielles (1) admettent une infinité de solutions périodiques que j'écrirai:

$$x_1 = \varphi_1(t, h), \qquad x_2 = \varphi_2(t, h), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t, h),$$

h étant une constante arbitraire.

Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes pour $\mu = 0$ et Φ contient μ en facteur de sorte que nous pouvons poser:

$$\Phi = \mu \Phi_1,$$

Φ_1 étant holomorphe en β_n et μ; d'ailleurs Φ_1 dépendra aussi de h. La courbe $\Phi = 0$ se décompose alors en deux autres, à savoir la droite $\mu = 0$ et la courbe $\Phi_1 = 0$; c'est cette dernière courbe qu'il convient d'étudier.

La courbe $\Phi = 0$ passe forcément par l'origine; il n'en est pas toujours de même de $\Phi_1 = 0$; il faudra d'abord s'arranger pour l'y faire passer,

en disposant convenablenent de h. Une fois qu'on l'y aura fait passer, on l'étudiera comme on a fait de la courbe $\Phi = 0$.

Si pour $\mu = \beta_n = 0$, $\frac{d\Phi_1}{d\beta_n}$ n'est pas nul, (ou plus généralement si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi_1 = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple d'ordre *impair*) il y aura encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

Il arrivera souvent que, même avant l'élimination, quelques-unes des fonctions ψ_i contiennent μ en facteur. Dans ce cas on commencerait par diviser par μ les équations correspondantes.

Si les équations (1) admettent une intégrale uniforme:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

les équations (4) ne seront pas distinctes à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

pour

$$x_1 = \varphi_1(0), \qquad x_2 = \varphi_2(0), \quad \ldots \quad x_n = \varphi_n(0).$$

En effet il viendra identiquement:

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i].$$

Si par exemple pour $x_i = \varphi_i(0)$, $\frac{dF}{dx_1}$ n'est pas nul; on pourra tirer de cette équation:

$$\psi_1 = \psi_2\theta_2 + \psi_3\theta_3 + \ldots + \psi_n\theta_n,$$

$\theta_2, \theta_3, \ldots \theta_n$ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n.$$

La première des équations (4) est donc alors une conséquence des $n - 1$ dernières. On la supprimera alors pour la remplacer par une autre équation choisie arbitrairement.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t. Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations.

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avions supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π. Si au contraire les X_i sont indépendants de t, la période d'une solution périodique peut être quelconque.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité.

Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\ , \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t+h), \qquad x_2 = \varphi_2(t+h)\ , \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t+h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t.

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\ , \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ, de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n + 1$ inconnues

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau$$

les n équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{5}$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. Cela est possible à moins que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants dans la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{Vmatrix}$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.)

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront pour les petites valeurs de μ, une solution périodique de période $T + \tau$.

§ 10. *Exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \tag{1}$$

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (voir chapitre I) des équations (1) en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ.

Ces équations aux variations s'écriront:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ, et leurs coefficients $\frac{dX_i}{dx_k}$, (quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$) sont des fonctions périodiques de t. Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coefficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des solutions de ces équations; on obtient n solutions particulières de la forme suivante:

$$\begin{array}{llll}
\xi_1 = e^{\alpha_1 t} S_{11}, & \xi_2 = e^{\alpha_1 t} S_{21}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_1 t} S_{n1}, \\
\xi_1 = e^{\alpha_2 t} S_{12}, & \xi_2 = e^{\alpha_2 t} S_{22}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_2 t} S_{n2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\xi_1 = e^{\alpha_n t} S_{1n}, & \xi_2 = e^{\alpha_n t} S_{2n}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_n t} S_{nn},
\end{array} \tag{3}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les solutions des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

les équations (2) admettraient deux solutions particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i.1}$$

et

$$\xi_i = te^{\alpha_1 t} S_{i.1} + e^{\alpha_1 t} S_{i.2},$$

les $S_{i.1}$ et les $S_{i.2}$ étant des fonctions périodiques de t.

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t, mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4) d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n - 1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la dynamique. Ecrivons-les donc sous la forme:

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous pourrons supposer, soit que F est indépendant de t; soit que F dépend non seulement des x et des y, mais encore de t, et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π.

Supposons que les équations (1′) admettent une solution périodique de période 2π:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que l'intégrale double:

$$\iint (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ_i', η_i' sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution:

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2.2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \dots & a_{2n.2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de cette substitution linéaire.

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2.2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \dots & a_{2n.2n}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T. Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire:

$$\sum(\xi_i\eta_i' - \xi_i'\eta_i).$$

Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose:

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coefficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coefficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η, s'ils sont originairement très petits, resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons ex-

primer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire*, du moins de la stabilité *temporaire*.

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations:

$$\xi_i = \sum A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coefficients constants et les S_{ik} des séries trigonométriques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t\sqrt{-\alpha_k^2} + i \sin t\sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coefficients de stabilité devient réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit plus de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une série dont le terme général est de la forme:

$$Ae^{ht}\cos(kt + mt + l)$$

où $(h + ik)^2$ est un des coefficients de stabilité, où m est un entier et l et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ainsi mis en évidence.

Si deux des coefficients de stabilité deviennent égaux entre eux, ou si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui représente ξ_i des termes de la forme:

$$Ate^{ht}\cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad At\cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une série toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le signe sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht}, ou enfin en dehors des signes trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coefficients de stabilité sont réels, négatifs et distincts, le temps n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aura stabilité temporaire.

Si l'un des coefficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtra sous un signe exponentiel; si deux des coefficients sont égaux ou que

l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coefficients ne sont pas réels, négatifs et distincts, il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t, l'un des n coefficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue, abaisser à $2n - 1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n - 1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n - 2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coefficients de stabilité, sons deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ, et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \neq 0$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.

Ce déterminant peut s'écrire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2\alpha\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2\alpha\pi} & \cdots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) *qui dépendent d'un paramètre μ admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.*

§ 11. *Solutions périodiques des équations de la dynamique.*

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, & \frac{dx_3}{dt} &= \frac{dF}{dy_3}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}, & \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{dF}{dx_3}, \end{aligned}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y, indépendante de t.

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est à dire que F est une fonction periodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π, de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π. (Cf. chapitre I.)

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \ldots.$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que:

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \qquad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que

$$-\frac{dF_0}{dx_1}, \quad -\frac{dF_0}{dx_2}, \quad -\frac{dF_0}{dx_3}$$

qui ne dépendent que de x_1, x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abréger n_1, n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1, x_2 et x_3. Il vient alors:

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T. Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, c'est à dire que:

$$n_1 T, \ n_2 T \quad \text{et} \quad n_3 T$$

soient des multiples de 2π.

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T, ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_2} \text{ et } \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore des solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à o.

Pour le prouver je vais employer un raisonnement analogue à celui du § 9.

Supposons que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement:

$$x_1 = a_1 + \delta a_1, \qquad x_2 = a_2 + \delta a_2, \qquad x_3 = a_3 + \delta a_3,$$
$$y_1 = \varpi_1 + \delta\varpi_1, \qquad y_2 = \varpi_2 + \delta\varpi_2, \qquad y_3 = \varpi_3 + \delta\varpi_3.$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$x_1 = a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1,$$
$$x_2 = a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2,$$
$$x_3 = a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3,$$
$$y_1 = \varpi_1 + n_1 T + \delta\varpi_1 + \Delta\varpi_1,$$
$$y_2 = \varpi_2 + n_2 T + \delta\varpi_2 + \Delta\varpi_2,$$
$$y_3 = \varpi_3 + n_3 T + \delta\varpi_3 + \Delta\varpi_3.$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T c'est que l'on ait:

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta \varpi_1 = \Delta \varpi_2 = \Delta \varpi_3 = 0. \tag{2}$$

Les six équations (2) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F =$ const. est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y, on a:

$$F(a_i + \partial a_i\,,\, \varpi_i + \partial \varpi_i) = F(a_i + \partial a_i + \Delta a_i\,,\, \varpi_i + n_i T + \partial \varpi_i + \Delta \varpi_i)$$
$$= F(a_i + \partial a_i + \Delta a_i\,,\, \varpi_i + \partial \varpi_i + \Delta \varpi_i).$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (2). Je supposerai de plus:

$$\varpi_1 = \partial \varpi_1 = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine du temps l'époque où y_1 est nul. Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta \varpi_i$ sont des fonctions holomorphes de μ, des ∂a_i et des $\partial \varpi_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (2) $\partial a_1\,, \partial a_2\,, \partial a_3\,, \partial \varpi_2$ et $\partial \varpi_3$ en fonctions de μ.

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent $\Delta a_1\,, \Delta a_2$ et Δa_3, développés suivant les puissances de μ, des ∂a_i et des $\partial \varpi_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ, et nous écrirons par conséquent les cinq équations (2) que nous avons à résoudre sous la forme:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{\Delta a_3}{\mu} = \Delta \varpi_1 = \Delta \varpi_2 = \Delta \varpi_3 = 0. \tag{3}$$

Il nous faut déterminer ϖ_2 et ϖ_3 de telle façon que ces équations soient satisfaites pour

$$\mu = \partial \varpi_2 = \partial \varpi_3 = \partial a_1 = \partial a_2 = \partial a_3 = 0. \tag{4}$$

Voyons ce que deviennent les premiers membres des équations (3) quand on y fait $\mu = 0$.

Il vient:

$$n_1 T + \Delta\varpi_1 = + \int_0^T \frac{dy_1}{dt} dt = - \int_0^T \frac{dF}{dx_1} dt = - \int_0^T \frac{dF_0}{d(a_1 + \partial a_1)} dt,$$

d'où:

$$\Delta\varpi_1 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_1} + n_1\right)$$

et de même:

$$\Delta\varpi_2 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_2} + n_2\right),$$

$$\Delta\varpi_3 = - T\left(\frac{dF_0}{dx_3} + n_3\right).$$

Il importe d'observer que dans F_0 il faut remplacer x_1, x_2 et x_3 par $a_1 + \partial a_1$, $a_2 + \partial a_2$, $a_3 + \partial a_3$; en effet pour $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et x_1, x_2, x_3 à des constantes qui restent constamment égales à leurs valeurs initiales $a_1 + \partial a_1$, $a_2 + \partial a_2$, $a_3 + \partial a_3$.

Il vient d'autre part:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dx_2}{dt} dt = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dF}{dy_2} dt$$

ou puisque F_0 ne dépend pas de y_2:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{d}{dy_2} \left(\frac{F - F_0}{\mu}\right) dt$$

ou pour $\mu = 0$

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_2} dt.$$

Supposons que μ, les $\partial\varpi$ et les ∂a soient nuls à la fois; il faudra alors faire dans F_1

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad y_1 = n_1 t, \quad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \quad y_3 = n_3 t + \varpi_3.$$

F_1 deviendra alors une fonction périodique de t de période T, et une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 de période 2π.

Soit ψ la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de t. Il viendra:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{d\varpi_2}\, dt = T \frac{d\psi}{d\varpi_2}$$

et de même

$$\frac{\Delta a_3}{\mu} = T \frac{d\psi}{d\varpi_3}.$$

Nous devons donc choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux équations

$$(5) \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Cela est toujours possible; en effet la fonction ψ est périodique en ϖ_2 et en ϖ_3 et elle est finie; donc elle a au moins un maximum et un minimum, pour lesquels ses deux dérivées doivent s'annuler. Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (3) sont satisfaites quand on y fait à la fois:

$$\mu = \partial\varpi_2 = \partial\varpi_3 = \partial a_1 = \partial a_2 = \partial a_3 = 0.$$

Nous pourrons donc tirer des équations (3) les cinq inconnues ∂a_i et $\partial\varpi_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ, s'annulant avec μ. Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\Delta a_2}{\mu}, \dfrac{\Delta a_3}{\mu}, \Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3\right)}{\partial(\partial a_1, \partial a_2, \partial a_3, \partial\varpi_2, \partial\varpi_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_1$, $\Delta\varpi_2$ et $\Delta\varpi_3$ sont indépendants de $\partial\varpi_2$ et de $\partial\varpi_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\Delta a_2}{\mu}, \dfrac{\Delta a_3}{\mu}\right)}{\partial(\partial\varpi_2, \partial\varpi_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3)}{\partial(\partial a_1, \partial a_2, \partial a_3)}.$$

Si l'on supprime les facteurs T^2 et $-T^3$, le premier de ces déterminants est égal au hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 et le second au hessien de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (3) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ, il existera une solution périodique de période T.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T, mais les solutions de période peu différente de T. Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3; nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n'_1, n'_2, n'_3, pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T' aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n'_1}, \frac{2\pi}{n'_2}, \frac{2\pi}{n'_3}$.

Si nous prenons en particulier:

$$n'_1 = n_1(1+\varepsilon), \qquad n'_2 = n_2(1+\varepsilon), \qquad n'_3 = n_3(1+\varepsilon)$$

les trois nombres n'_1, n'_2, n'_3 seront commensurables entre eux puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Il nous conduiront donc à une solution périodique de période:

$$T' = \frac{1+\varepsilon}{T}$$

de telle façon que nous aurons:

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi'_i(t, \mu, \varepsilon), \tag{6}$$

les φ_i et les φ'_i étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε, et périodiques en t, mais de façon que la période dépende de ε.

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (4), F doit devenir une constante indépendante du temps (puisque $F=$ const. est une des intégrales des équations (1)). Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables.

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question l'équation

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ. Si donc nous nous donnons arbitrairement B, il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ.

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ψ ne dépend plus que d'une seule variable ϖ_2. Les relations (5) se réduisent alors à

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0 \tag{7}$$

et le hessien de ψ se réduit à $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$. D'où cette conclusion:

A chacune des racines simples de l'équation (7) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair ainsi que nous l'avons vu au § 9, et que cette équation admet toujours de pareilles racines puisque la fonction ψ a au moins un maximum qui ne peut correspondre qu'aux racines impaires de l'équation (7).

Revenons au cas où l'on a trois degrés de liberté, et où la période est constante et égale à T.

Je dis que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ peuvent se développer suivant les puissances croissantes de μ. En effet, en vertu du théorème III § 2, les x et les y peuvent être développés suivant les puissances de μ, et de $\partial a_1, \partial a_2, \partial a_3, \partial\varpi_2$ et $\partial\varpi_3$. Mais imaginons que l'on ait déterminé les ∂a et les $\partial\varpi$ de façon que la solution soit périodique de période T. On tirera alors les ∂a et les $\partial\varpi$ des équations (3) sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de μ, de sorte que les x et les y seront finalement ordonnées suivant les puissances de μ.

La solution devant être périodique de période T quel que soit μ, les coefficients des diverses puissances de μ seront des fonctions périodiques de t.

Remarquons de plus que l'on peut toujours supposer que l'origine du temps ait été choisie de telle sorte que y_1 s'annule avec t, et que cela ait lieu quel que soit μ. Alors pour $t = 0$ on aura:

$$0 = y_1^0 = y_1^1 = y_1^2 = \dots .$$

L'existence et la convergence de ces séries étant ainsi établie, je vais déterminer les coefficients.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant[1]

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \dots,\\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \dots,\\
x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \dots,\\
y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots,\\
y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots,\\
y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots.
\end{aligned}
$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0}F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1,\quad \frac{d}{dx_2^0}F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2,\quad \frac{d}{dx_3^0}F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

On a de plus:

$$y_i^0 = n_i t + \varpi_i.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F, à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (8), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots.$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0; que

$$(9)\qquad \Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1\frac{dF_0}{dx_3^0}$$

[1] Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (8) sont des indices et non des exposants.

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3^0} = \theta_k - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k - n_3 x_3^k,$$

où θ_k dépend seulement

des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1},
des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction θ_k est une fonction périodique de période 2π. L'équation (9) montre que $\theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

$$\frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0} \tag{10}$$

et

$$\frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \qquad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \qquad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0}, \tag{11}$$

et plus généralement:

$$\frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0} \tag{10'}$$

et

$$\frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2F_0}{dx_3^0 dx_i^0}. \tag{11'}$$

Intégrons d'abord les équations (10). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs:

$$n_1 t + \varpi_1, \ n_2 t + \varpi_2, \ n_3 t + \varpi_3.$$

Puisque y_1^0 doit s'annuler avec t, ϖ_1 sera nul. Alors les seconds membres des équations (10) sont des fonctions périodiques de t de période

T; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (10) soient des fonctions périodiques de t, il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tout connus.

Je puis écrire en effet:

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0. J'écrirai pour abréger:

$$F_1 = \sum A \sin \omega$$

en posant

$$\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \sum A m_1 \cos \omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \sum A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \sum A m_3 \cos \omega$$

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t. Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega, \qquad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,\ \omega = h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3)$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coefficient de t est nul. Nous aurons alors:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \mathrm{S} A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_3} = \mathrm{S} A m_3 \cos \omega.$$

Si donc on a:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0, \tag{12}$$

il viendra:

$$\mathrm{S}Am_1 \cos\omega = 0, \qquad \mathrm{S}Am_2 \cos\omega = 0, \qquad \mathrm{S}Am_3 \cos\omega = 0. \tag{13}$$

La première des équations (11) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 \mathrm{S}Am_1 \cos\omega + n_2 \mathrm{S}Am_2 \cos\omega + n_3 \mathrm{S}Am_3 \cos\omega = 0.$$

Si donc les relations (12) sont satisfaites, les séries $\sum Am_i \cos\omega$ ne contiendront pas de terme tout connu, et les équations (10) nous donneront:

$$x_1^1 = \sum \frac{Am_1 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \sum \frac{Am_2 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \sum \frac{Am_3 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1, C_2^1 et C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (10). La fonction ψ est une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π. De plus elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (12).

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (11) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1.

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1. Je puis donc écrire les équations (11) sous la forme suivante:

$$\frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0 dx_i^0}, \tag{14}$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1, C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t, il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i, je devrai avoir:

$$C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0 dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0 dx_i^0} = H_i^0. \tag{15}$$

Les trois équations linéaires (15) déterminent les trois constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1.

Il n'y aurait d'exception qui si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est à dire si le *hessien* de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0 était nul; nous exclurons ce cas.

Les équations (14) me donneront donc:

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues s'annulant avec t, et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (10') en y faisant $k = 2$ et $i = 1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1.

Il est aisé de voir que nous avons:

$$\Theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut:

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \sum A m_i \cos \omega.$$

Les équations (10') s'écrivent alors:

$$\frac{dx_i^2}{dt} - \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2 F_1}{dy_k^0 dy_i^0}$$

ou

$$(16)\qquad \frac{dx_i^2}{dt} = H'_i - k_1^1 \Sigma A m_1 m_i \sin\omega - k_2^1 \Sigma A m_2 m_i \sin\omega - k_3^1 \Sigma A m_3 m_i \sin\omega,$$

H'_i étant une fonction périodique de t, que l'on peut regarder comme entièrement connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (16), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

Comme y_1^1 s'annule avec t, on doit avoir:

$$k_1^1 = 0;$$

nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H'_i, ces trois équations s'écriront:

$$(17)\qquad \begin{aligned} E_1 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2 m_1 \sin\omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3 m_1 \sin\omega, \\ E_2 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2^2 \sin\omega \quad + k_3^1 \mathrm{S} A m_3 m_2 \sin\omega, \\ E_3 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2 m_3 \sin\omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3^2 \sin\omega, \end{aligned}$$

en conservant au signe de sommation S le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (17) que j'écrirai:

$$-E_2 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3},$$

$$-E_3 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2}.$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1, à moins que le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les

valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (16) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante:

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (16), nous servir des considérations suivantes:

Les équations (1) admettent une intégrale:

$$F = B,$$

B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant:

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a:

$$\Phi_0 = B_0, \qquad \Phi_1 = B_1, \qquad \Phi_2 = B_2, \ldots,$$

B_0, B_1, B_2 etc. étant autant de constantes différentes.

Le premier membre de l'équation:

$$\Phi_2 = B_2$$

dépend des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1, de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2 que nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2, de C_2^2 et de C_2^3.

Nous pouvons conclure de là que la première des équations (17) doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (17) ne sont pas distinctes.

Prenons maintenant les équations (11′) et faisons-y $k = 2$; nous ob-

tiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1, C_1^2 et C_1^3 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme:

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_1^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k_i^2 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Reprenons ensuite les équations (10′) en y faisant $k = 3$; si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2, puis les x_i^3 sous la forme:

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ, périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0 par rapport aux x_i^0 était nul où si le hessien de ϕ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 était nul.*

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en mécanique céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t). \tag{18}$$

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t, développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t.

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (18) à la forme canonique des équations de la dynamique. Cela se fera en posant:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi)d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors:

$$(19)\qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta},$$

auxquelles nous pourrons adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante:

$$(19)\qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (18) s'écrit

$$(20)\qquad \rho = h\,\mathrm{sn}\,(gt + \varpi), \qquad \sigma = hg\,\mathrm{cn}\,(gt + \varpi)\,\mathrm{dn}\,(gt + \varpi)$$

où g et ϖ sont deux constantes d'intégration et où h, ainsi que le module du sinus amplitude sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ, quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2, définies comme il suit. Nous aurons d'abord:

$$x_2 = \eta, \qquad y_2 = \xi.$$

Des équations (20) qui donnent ρ et σ en fonctions de g et de $gt + \varpi$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \varpi$ en fonctions de ρ et de σ. Il vient:

$$g = \chi_1(\rho\,,\,\sigma), \qquad gt + \varpi = \chi_2(\rho\,,\,\sigma).$$

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho\,,\,\sigma)$ et pour y_1

$$y_1 = \frac{k}{2\pi}\chi_2(\rho\,,\,\sigma),$$

k désignant la période réelle de $\mathrm{sn}\,(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1 les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2.

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (18) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (18) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ. L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (18) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, a des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

La méthode exposée dans ce paragraphe s'applique également à un cas particulier du problème des trois corps.

Supposons une masse nulle C attirée par deux masses mobiles A et B égales l'une à $1 - \mu$ et l'autre à μ et décrivant d'un mouvement uniforme deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun supposé fixe. Imaginons de plus que la masse C se meuve dans le plan de ces deux circonférences.

Nous verrons plus loin que dans ce cas les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

On désigne par x_1 la vitesse aréolaire du point C, par x_2 la racine carrée du grand axe de l'orbite de C, par y_1 la différence de la longitude du périhélie de C et de la longitude de B, par y_2 l'anomalie moyenne.

D'ailleurs F peut être développée suivant les puissances de μ et l'on a:

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est nul.

Il semble donc d'abord que les méthodes du présent paragraphe sont en défaut. Il n'en est rien et un artifice très simple permet de tourner la difficulté.

Les équations (1) admettent comme intégrale

$$F = C.$$

Considérons la constante C comme une donnée de la question.

Si alors $\varphi(F)$ est une fonction quelconque de F et $\varphi'(F)$ sa dérivée, on aura:

$$\varphi'(F) = \varphi'(C)$$

et les équations (1) pourront s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dx_i}$$

ou

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dy_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right], \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d}{dx_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right].$$

En général, le hessien de $\frac{\varphi(F_0)}{\varphi'(C)}$ ne sera pas nul. C'est ce qui arrive en particulier quand

$$\varphi(F_0) = F_0^2 = x_1^2 + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{4x_2^4}.$$

Les solutions des équations (1) qui correspondent à la valeur particulière C de l'intégrale F appartiennent aussi aux équations (1').

Considérons maintenant une solution des équations (1) qui soit telle que l'intégrale F soit égale à une constante C_1 différente de C.

Je dis que cette solution appartiendra encore aux équations (1') pourvu qu'on y change t en

$$t\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}.$$

On a en effet:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i};$$

si on change t en $t\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}$ il viendra:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dx_i}$$

ou puisque $F=C_1$

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dx_i}.$$

C. Q. F. D.

Des solutions de (1) il est donc aisé de déduire celles de (1') et inversement.

Les méthodes du présent paragraphe sont donc, grâce à cet artifice, applicables à ce cas particulier du problème des trois corps.

Elles ne le seraient pas aussi aisément au cas général. Dans le cas général en effet, non seulement le hessien de F_0 est nul, mais celui de $\varphi(F_0)$ est encore nul, quelle que soit la fonction φ.

De là certaines difficultés dont je ne parlerai pas ici; j'y reviendrai plus loin et je me bornerai pour le moment à renvoyer le lecteur à un travail que j'ai inséré dans le Bulletin astronomique, tome 1^er^, page 65.

§ 12. *Calcul des exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,3) \tag{1}$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i=\varphi_i(t),\qquad y_i=\psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons:

$$x_i=\varphi_i(t)+\xi_i,\qquad y_i=\psi_i(t)+\eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant:

$$(3)\qquad \xi_i = e^{\alpha t} S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t} T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t. Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme (les équations linéaires (2) étant du sixième ordre). Mais il importe d'observer, que dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérescente.

Cela posé, supposons d'abord $\mu = 0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Alors les équations (2) se réduisent à:

$$(2')\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0\, dx_k^0}\xi_k.$$

Les coefficients de ξ_k dans la seconde équation (2') sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2')

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \qquad \eta_1 = \eta_1^0, \qquad \eta_2 = \eta_2^0, \qquad \eta_3 = \eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons main-

tenant chercher à développer α, S_i et T_i, non pas suivant les puissances croissantes de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

$$S_i = S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + S_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

$$T_i = T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + T_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots.$$

Je me propose d'abord d'établir que ce développement est possible.

Montrons d'abord que les exposants caractéristiques α peuvent se développer suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu au § 10, les exposants caractéristiques nous seront donnés par l'équation suivante, en reprenant les notations des §§ 9 et 10:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{\alpha T} & \dfrac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \ldots & \dfrac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \dfrac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \dfrac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{\alpha T} & \ldots & \dfrac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \dfrac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \ldots & \dfrac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est holomorphe en α; de plus d'après le théorème III, § 2, les γ peuvent être développés suivant les puissances de μ et des β (cf. § 9), d'ailleurs d'après le § 9 les β peuvent se développer eux-mêmes suivant les puissances de μ. D'après cela les γ et le déterminant que je viens d'écrire peuvent eux-mêmes être développés suivant les puissances de μ. Il résulte de là que les exposants α nous sont donnés en fonctions de μ par une équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

dont le premier membre est holomorphe en α et en μ.

Si pour $\mu = 0$, tous les exposants α étaient différents les uns des autres, l'équation $G = 0$ n'aurait pour $\mu = 0$ que des racines simples, et on en conclurait que les α seraient développables suivant les puissances de μ (théorème IV, § 2).

Mais il n'en est pas ainsi; nous venons de voir en effet que pour $\mu = \mathrm{o}$, tous les α sont nuls.

Reprenons les notations du § 11, notre équation pourra s'écrire, en supposant trois degrés de liberté seulement:

$$\mathrm{o} = G(\alpha\,,\mu) =$$

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\frac{d\Delta a_1}{d\delta a_1} + \mathrm{I} - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta \varpi_3} \\
\frac{d\Delta a_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_2} + \mathrm{I} - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta \varpi_3} \\
\frac{d\Delta a_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_3} + \mathrm{I} - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta \varpi_3} \\
\frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_1} + \mathrm{I} - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta \varpi_1}{d\delta \varpi_3} \\
\frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_2} + \mathrm{I} - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta \varpi_2}{d\delta \varpi_3} \\
\frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_1} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_2} & \frac{d\Delta \varpi_3}{d\delta \varpi_3} + \mathrm{I} - e^{\alpha T}
\end{array}\right|$$

Cela fait, je pose:

$$\alpha = \lambda\sqrt{\mu}.$$

Je divise les trois premières lignes du déterminant par $\sqrt{\mu}$; je divise ensuite les trois dernières colonnes par $\sqrt{\mu}$ (de sorte que le déterminant lui-même se trouve finalement divisé par μ^3).

Je fais ensuite $\mu = \mathrm{o}$.

J'observe que d'après ce que nous avons vu au § 11, $\Delta a_1\,, \Delta a_2\,, \Delta a_3$ sont divisibles par μ. Si donc j'envisage le premier élément de la première ligne cet élément après la division par $\sqrt{\mu}$ s'écrira:

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_1} + \frac{\mathrm{I} - e^{\lambda T\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}}$$

et quand on y fera $\mu = \mathrm{o}$ il deviendra $-\lambda T$.

De même le second élément de la 1ère ligne s'écrit:

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_2}$$

et il tend vers o avec μ.

Ainsi quand on aura fait $\mu = 0$, les trois premiers éléments des trois premières lignes s'annuleront à l'exception des éléments de la diagonale principale qui deviendront égaux à $-\lambda T$.

Considérons maintenant les trois derniers éléments des trois dernières lignes; ils s'écriront:

$$\frac{d\Delta \varpi_i}{\sqrt{\mu}\, d\delta \varpi_i} + \frac{1 - e^{\lambda T \sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta \varpi_k}{\sqrt{\mu}\, d\delta \varpi_i}$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale. D'après ce que nous avons vu au § 11, $\Delta\varpi_k$ est développable suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$, de plus pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_i$ ne dépend pas des $\delta\varpi_i$. On en conclura que $\frac{d\Delta\varpi_k}{d\delta\varpi_i}$ est divisible par μ.

Donc quand on fera $\mu = 0$, les trois derniers éléments des trois dernières lignes deviendront égaux à

$$-\lambda T \quad \text{ou à} \quad 0$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale.

Considérons maintenant les trois premiers éléments des trois dernières lignes $\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k}$. D'après ce que nous avons vu au § 11, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k} = -T\frac{d^2 F_0}{dx_i\, dx_k}.$$

Passons enfin aux trois derniers éléments des trois premières lignes qui s'écrivent:

$$\frac{d\Delta a_i}{\mu\, d\delta\varpi_k}.$$

D'après ce que nous avons vu au § 11, si dans F_1 on substitue a_1, a_2, a_3, $n_1 t + \varpi_1$, $n_2 t + \varpi_2$, $n_3 t + \varpi_3$ à la place de $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, on voit que F_1 devient une fonction périodique de t de période T et si l'on appelle ψ la valeur moyenne de cette fonction périodique, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{\Delta a_i}{\mu} = T\frac{d\psi}{d\varpi_i},$$

d'où

$$\frac{d\Delta a_i}{\mu\, d\varpi_k} = T\frac{d^2\psi}{d\varpi_i\, d\varpi_k}.$$

Il importe de remarquer que l'on a identiquement:

$$n_1\frac{d\psi}{d\varpi_1} + n_2\frac{d\psi}{d\varpi_2} + n_3\frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Nous voyons donc que pour $\mu = 0$ on a:

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} =$$

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_3} \\
0 & -\lambda & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} \\
0 & 0 & -\lambda & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2} \\
-\frac{d^2F_0}{dx_1^2} & -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_3} & -\lambda & 0 & 0 \\
-\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2F_0}{dx_2^2} & -\frac{d^2F_0}{dx_2 dx_3} & 0 & -\lambda & 0 \\
-\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_3} & -\frac{d^2F_0}{dx_2 dx_3} & -\frac{d^2F_0}{dx_3^2} & 0 & 0 & -\lambda
\end{vmatrix}$$

En égalant à 0 ce déterminant, on a une équation du 6e degré en λ; deux de ses racines sont nulles; nous n'en parlerons pas, car elles se rapportent aux deux solutions particulières de forme dégénérescente dont j'ai parlé plus haut. Les quatre autres solutions sont distinctes en général.

Il résulte alors du théorème IV, § 2, que nous pourrons tirer de l'équation

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = 0$$

λ (et par conséquent α) sous la forme d'une série développée suivant les

puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$. J'ajouterai que λ peut se développer suivant les puissances de μ et que le développement de α ne contient que des puissances impaires de $\sqrt{\mu}$. En effet les racines de l'équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

doivent être deux à deux égales et de signe contraire (cf. § 10). Donc α doit changer de signe quand je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Démontrons maintenant que S_i et T_i peuvent aussi se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

S_i et T_i nous sont donnés en effet par les équations suivantes:

$$(2'')\qquad \begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} + \alpha S_i &= \sum \frac{d^2F}{dy_i dx_k} S_k + \sum \frac{d^2F}{dy_i dy_k} T_k, \\ \frac{dT_i}{dt} + \alpha T_i &= -\sum \frac{d^2F}{dx_i dx_k} S_k - \sum \frac{d^2F}{dx_i dy_k} T_k. \end{aligned}$$

Soit β_i la valeur initiale de S_i et β'_i celle de T_i; les valeurs de S_i et de T_i pour une valeur quelconque de t pourront d'après le théorème III, § 2, se développer suivant les puissances de μ, de α, des β_i et des β'_i. De plus à cause de la forme linéaire des équations, ces valeurs seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i et des β'_i.

Soit, pour employer des notations analogues à celles du § 9, $\beta_i + \psi_i$ la valeur de S_i et $\beta'_i + \psi'_i$ celle de T_i pour $t = T$. La condition pour que la solution soit périodique c'est que l'on ait

$$\psi_i = \psi'_i = 0.$$

Les ψ_i et les ψ'_i sont des fonctions linéaires des β_i et des β'_i; ces équations sont donc linéaires par rapport à ces quantités. En général ces équations n'admettent d'autre solution que

$$\beta_i = \beta'_i = 0,$$

de sorte que les équations (2″) n'ont d'autre solution périodique que

$$S_i = T_i = 0.$$

Mais nous savons que si l'on choisit α de façon à satisfaire à $G(\alpha, \mu) = 0$, les équations (2″) admettent des solutions périodiques autres que $S_i = T_i = 0$.

Par conséquent le déterminant des équations linéaires $\psi_i = \psi'_i = 0$ est nul. Nous pourrons donc tirer de ces équations les rapports:

$$\frac{\beta_i}{\beta_1} \quad \text{et} \quad \frac{\beta'_i}{\beta_1}$$

sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de μ.

Comme β'_1 reste arbitraire, nous conviendrons de prendre $\beta'_1 = 1$ de telle sorte que la valeur initiale de T_1 soit égale à 1. Les β_i et les β'_i sont alors développés suivant les puissances de α et de μ; mais les S_i et les T_i sont comme nous l'avons vu développables suivant les puissances de α, de μ, des β_i et des β'_i et d'autre part α est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Donc les S_i et les T_i seront développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

C. Q. F. D.

On aura en particulier:

$$T_1 = T_1^0 + T_1^1\sqrt{\mu} + T_1^2\mu + \ldots.$$

Comme, d'après notre hypothèse, β'_1 qui est la valeur initiale de T_1 doit être égale à 1, quel que soit μ, on aura pour $t = 0$:

$$T_1^0 = 1, \qquad 0 = T_1^1 = T_1^2 = \ldots = T_1^m = \ldots.$$

Ayant ainsi démontré l'existence de nos séries, nous allons chercher à en déterminer les coefficients.

Nous avons:

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \ldots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \ldots),$$

$$(4) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l} \dfrac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dS_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \ldots \end{array}\right|, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l} \dfrac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dT_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \ldots \end{array}\right|.$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coefficients dans les équations (2) en écrivant:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dy_i\,dx_k} &= A^0_{ik} + \mu A^2_{ik} + \mu^2 A^4_{ik} + \dots\\
\frac{d^2F}{dy_i\,dy_k} &= B^0_{ik} + \mu B^2_{ik} + \mu^2 B^4_{ik} + \dots\\
-\frac{d^2F}{dx_i\,dx_k} &= C^0_{ik} + \mu C^2_{ik} + \mu^2 C^4_{ik} + \dots\\
-\frac{d^2F}{dx_i\,dy_k} &= D^0_{ik} + \mu D^2_{ik} + \mu^2 D^4_{ik} + \dots
\end{aligned}
$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

On observera que:

$$
(6)\qquad
\begin{gathered}
A^0_{ik} = B^0_{ik} = D^0_{ik} = 0,\\
C^m_{ik} = C^m_{ki}, \qquad B^m_{ik} = B^m_{ki}, \qquad A^m_{ik} = -D^m_{ki}.
\end{gathered}
$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ, des η, de leurs dérivées et des dérivées secondes de F. Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifierons ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \text{etc.}\qquad S^0_i,\ S^1_i,\ \dots,\ T^0_i,\ T^1_i,\ \dots$$

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Egalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$; il vient:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dS^1_i}{dt} + \alpha_1 S^0_i &= \textstyle\sum_k A^0_{ik} S^1_k + \sum_k B^0_{ik} T^1_k,\\
\frac{dT^1_i}{dt} + \alpha_1 T^0_i &= \textstyle\sum_k C^0_{ik} S^1_k + \sum_k D^0_{ik} T^1_k.
\end{aligned}
$$

Egalons les termes en μ, il vient:

$$(8)\qquad \frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \Sigma_k (A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^2 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^2 T_k^0), \quad (i=1,2,3)$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT_i^2}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent:

$$\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 \eta_i^0 = \Sigma_k C_{ik}^0 S_k^1.$$

La première de ces équations montre que S_1^1, S_2^1 et S_3^1 sont des constantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a:

$$(9)\qquad \alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1,$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0, les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1.

De son côté l'équation (8) s'écrira:

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \Sigma_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^2 sont des fonctions périodiques de t; développons-les d'après la formule de Fourier et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^2. Il viendra:

$$\alpha_1 S_i^1 = \Sigma_k b_{ik} \eta_i^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra:

$$(10)\qquad \alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik} (C_{k1}^1 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1).$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1, 2$ et 3, nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1. En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du 3^{me} degré qui déterminera λ_1^2.

Si nous posons pour abréger

$$e_{ik} = b_{i1}C^{0}_{1k} + b_{i2}C^{0}_{2k} + b_{i3}C^{0}_{3k},$$

l'équation due à cette élimination s'écrira:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Elle peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C^{0}_{11} & C^{0}_{12} & C^{0}_{13} \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C^{0}_{21} & C^{0}_{22} & C^{0}_{23} \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C^{0}_{31} & C^{0}_{32} & C^{0}_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coefficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k, les S_i^m et les T_i^m. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1, nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C^0_{ik} et b_{ik}.

On a évidemment:

$$C^0_{ik} = -\frac{d^2F_0}{dx_i^0\, dx_k^0}$$

et

$$B_{ik}^2 = \frac{d^2 F_1}{dy_i^0 \, dy_k^0}$$

ou

$$B_{ik}^2 = -\sum A m_i m_k \sin \omega \qquad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = -\mathrm{S} A m_i m_k \sin \omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que soient les valeurs entières attribuées à m_1, m_2 et m_3. La sommation représentée par le signe S s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe S nous avons par conséquent:

$$\omega = m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2 \psi}{d\varpi_i \, d\varpi_k} \qquad (\text{pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation, transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{33} & b_{32} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \dfrac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$n_1^2\alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}(n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0).$$

L'expression $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2. Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrons regarder $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ comme une constante donnée. Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2, on forme l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0, \tag{12}$$

qui est l'équation (7) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (12) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ. Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de ϖ_2 correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (12) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le § 10.

Ainsi, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables pourvu que μ soit suffisamment petit.

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (12) aurait des racines multiples.

Voici comment il faudrait continuer le calcul.

Imaginons que l'on ait déterminé complètement les quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

et les fonctions:

$$S_i^0, S_i^1, \ldots, S_i^m,$$

$$T_i^0, T_i^1, \ldots, T_i^{m-1},$$

et que l'on connaisse les fonctions S_i^{m+1} et T_i^m *à une constante près.* Supposons qu'on se propose ensuite de calculer α_{m+1}, d'achever la détermination des fonctions S_i^{m+1} et T_i^m et de déterminer ensuite les fonctions S_i^{m+2} et T_i^{m+1} *à une constante près.*

En égalant les puissances semblables de μ dans les équations (4), on obtient des équations de la forme suivante, analogues aux équations (7) et (8)

$$(13)\quad \begin{aligned} &-\frac{dT_i^{m+1}}{dt} + \sum_k C_{ik}^0 S_k^{m+1} - \alpha_1 T_i^m - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{quantité connue}, \\ &-\frac{dS_i^{m+2}}{dt} + \sum_k B_{ik}^2 T_k^m - \alpha_1 S_i^{m+1} - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{quantité connue}. \end{aligned} \qquad (i=1,2,3)$$

Les deux membres de ces équations (12) sont des fonctions périodiques de t. Egalons la valeur moyenne de ces deux membres. Si nous désignons par $[v]$ la valeur moyenne d'une fonction périodique quelconque U, si nous observons que si U est périodique on a

$$\left[\frac{dU}{dt}\right] = 0,$$

si nous rappelons que, T_k^m étant connu à une constante près, $T_k^m - [T_k^m]$ et

$$[B_{ik}^2(T_k^m - [T_k^m])]$$

sont des quantités connues, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\sum_k C_{ik}^0[S_k^{m+1}] - \alpha_1[T_i^m] - \alpha_{m+1}T_i^0 = \text{quantité connue},\\ &\sum_k b_{ik}[T_k^m] - \alpha_1[S_i^{m+1}] - \alpha_{m+1}S_i^1 = \text{quantité connue}. \end{aligned} \qquad (i=1,2,3)$$

Ces équations (14) vont nous servir à calculer α_{m+1}, $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ et par conséquent à achever la détermination des fonctions T_i^m et S_i^{m+1} qui ne sont encore connues qu'à une constante près.

Si l'on additionne les équations (14) après les avoir respectivement multipliées par

$$S_1^1,\ S_2^1,\ S_3^1,\ T_1^0,\ T_2^0,\ T_3^0$$

on trouve:

$$2\sum_i S_i^1 T_i^0 \alpha_{m+1} = \text{quantité connue},$$

ce qui détermine α_{m+1}.

Si dans les équations (14) on remplace α_{m+1} par la valeur ainsi trouvée, on a pour déterminer les six inconnues $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ six équations linéaires dont cinq seulement sont indépendantes.

Cela posé, on déterminera $[T_1^m]$ par la condition que $[T_1^m]$ soit nul pour $t = 0$, conformément à l'hypothèse faite plus haut, et les cinq équations (14) restées indépendantes permettront de calculer les cinq autres inconnues.

Les équations (13) nous permettront ensuite de calculer $\frac{dT_i^{m+1}}{dt}$ et $\frac{dS_i^{m+2}}{dt}$ et par conséquent de déterminer les fonctions T_i^{m+1} et S_i^{m+2} à une constante près — et ainsi de suite.

§ 13. *Solutions asymptotiques.*

Soient:

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t.

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t, elles sont périodiques de période 2π.

Soit:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π. Posons:

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i. \tag{2}$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t, périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ.

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n, \tag{3}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connaît la forme de leur solution générale, on trouve:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn};
\end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t.

Si alors nous posons:

$$\xi_1 = \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{1n},$$
$$\xi_2 = \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_n = \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},$$

les équations (2) deviendront:

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ.

Nous pourrons d'ailleurs écrire

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^n + \ldots;$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η.

Quant aux équations (3), elles deviennent:

$$(3') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i\eta_i.$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').

Je dis que nous devrons trouver:

$\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots,$ $A_n e^{\alpha_n t}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire alors:

$$(4') \qquad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots,$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A.

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans H_i^p et nous trouverons:

$$H_i^p = H_i^{p,p} + H_i^{p,p+1} + \ldots + H_i^{p,q} + \ldots,$$

$H_i^{p.q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A.

Nous trouverons alors:

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \qquad \eta_i^1 = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = H_i^{2.2}, \qquad \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 = H_i^{2.3} + H_i^{3.3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = H_i^{2.q} + H_i^{3.q} + \ldots + H_i^{q.q} = K_q.$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence

$$\eta_i^2, \eta_i^3, \ldots, \eta_i^q, \ldots.$$

En effet K_q ne dépend que des $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{q-1}$. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrons écrire K_q sous la forme suivante:

$$K_1 = \sum A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} e^{t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)} \psi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ψ une fonction périodique.

On peut écrire encore:

$$\psi = \sum C e^{\gamma t \sqrt{-1}},$$

C étant un coefficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abréger:

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} = A^q, \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \sum \alpha\beta,$$

et il viendra:

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = \sum C A^q e^{t(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\eta_i^q = \sum \frac{C A^q e^{t(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait:

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t. Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i. \tag{5}$$

Cette convergence est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans le § 3 mais je préfère en donner une démonstration directe.

Remplaçons les équations (2') par les suivantes:

$$\bar{\eta}_i = \frac{1}{\varepsilon} A_i e^{\alpha_i t} + \overline{H}_i^2 + \overline{H}_i^3 + \ldots + \overline{H}_i^p + \ldots. \tag{2''}$$

Définissons $\overline{H}_i^p$. On voit sans peine que H_i^p est de la forme suivante:

$$H_i^p = \sum C\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p, γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors:

$$\overline{H}_i^p = \sum |C| \eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques. Quant à ε, c'est une constante positive.

On peut tirer des équations (2'') les η sous la forme suivante:

$$\eta_i = \sum M\varepsilon^{-\Sigma\beta} A_1^{\beta_1} A_2^{\alpha_2}\ldots A_n^{\beta_n} e^{(\Sigma\alpha_i\beta)t} \tag{4''}$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β. Si on compare avec les séries tirées de (2') qui s'écrivent:

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2}\ldots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\Sigma\alpha_i\beta + \gamma\sqrt{-1}]},$$

voici ce qu'on observe: 1° M est réel positif et plus grand que $|N|$. 2° Π désigne le produit des diviseurs (5) ($q < \Sigma\beta$).

Si donc la série (4'') converge et si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε, la série (4') convergera également. Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge:

si l'expression

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée ε pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de γ; c'est à dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine;

ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi.

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n - k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4') restera convergente si on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution générale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs:

$$k = \frac{n}{2}.$$

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

Supposons de plus que

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0. \tag{6}$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1, x_2 et t; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées:

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront:

$$e^{x_1} \cos t, \; e^{x_1} \sin t \quad \text{et} \quad x_2.$$

De cette façon

1°. à tout système de valeurs des trois quantités x_1, x_2 et t correspondra un point de l'espace;

2°. à tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1, x_2, $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π;

3°. si l'on fait varier t, (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence;

4°. à la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$;

5°. à la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z.

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2′) et (3′) relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux valeurs de l'exposant α; nous pourrons supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développés suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers 0. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques;* car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers 0, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B, la seconde A.

A chacune de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotiqae.* Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C.

Supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ et que les fonctions X soient développables suivant les puissances de ce paramètre.

Imaginons que pour $\mu = 0$, les exposants caractéristiques α soient tous distincts de telle façon que ces exposants, étant définis par l'équation $G(\alpha, \mu) = 0$ du paragraphe précédent, soient eux-mêmes développables suivant les puissances de μ.

Supposons enfin qu'on ait, ainsi que nous venons de le dire, annulé

toutes les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle.

Les séries (4') qui définissent les quantités η_i dépendent alors de μ. Je me propose d'établir que ces séries peuvent être développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, mais encore suivant les puissances de μ.

Considérons l'inverse de l'un des diviseurs (5)

$$(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i)^{-1}.$$

Je dis que cette expression peut être développée suivant les puissances de μ.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les k exposants caractéristiques dont la partie réelle est positive et que nous sommes convenus de conserver. Chacun d'eux est développable suivant les puissances de μ. Soit α_i^0 la valeur de α_i pour $\mu = 0$; nous pourrons prendre μ_0 assez petit pour que α_i diffère aussi peu que nous voudrons de α_i^0 quand $|\mu| < \mu_0$. Soit alors h une quantité positive plus petite que la plus petite des parties réelles des k quantités $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$; nous pourrons prendre μ_0 assez petit pour que, quand $|\mu| < \mu_0$, les k exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ait leur partie réelle plus grande que h.

La partie réelle de $\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i$ sera alors plus grande que h (si $\beta_i > 0$), de sorte qu'on aura:

$$|\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i| > h.$$

Ainsi si $|\mu| < \mu_0$, la fonction

$$(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i)^{-1}$$

reste uniforme, continue, finie et plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{h}$.

Nous en conclurons d'après un théorème bien connu que cette fonction est développable suivant les puissances de μ et que les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux du développement de

$$\frac{1}{h\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Il est à remarquer que les nombres h et μ_0 sont indépendants des entiers β et γ.

Il y aurait exception dans le cas où β_i serait nul. La partie réelle du diviseur (5) pourrait alors être plus petite que h et même être négative. Elle est égal en effet à la partie réelle de $\Sigma\alpha\beta$ qui est positive, moins la partie réelle de α_i qui est également positive et qui peut être plus grande que celle de $\Sigma\alpha\beta$, si β_i est nul.

Supposons que la partie réelle de α_i reste plus petite qu'un certain nombre h_1 tant que $|\mu| < \mu_0$. Alors si

$$\Sigma\beta > \frac{h_1}{h} + 1 \tag{7}$$

la partie réelle de (5) est certainement plus grande que h; il ne peut donc y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels l'inégalité (7) n'a pas lieu.

Supposons maintenant que la partie imaginaire des quantités α_1, α_2, ..., α_k reste constamment plus petite en valeur absolue qu'un certain nombre positif h_2; si l'on a alors:

$$|\gamma| > h_2\Sigma\beta + h \tag{8}$$

la partie imaginaire de (5) et par conséquent son module sera encore plus grand que h; de telle sorte qu'il ne peut y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels aucune des inégalités (7) et (8) n'a lieu. Mais ces diviseurs qui ne satisfont à aucune de ces inégalités sont *en nombre fini*.

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, aucun d'eux ne s'annule pour les valeurs de μ que nous considérons; nous pouvons donc prendre h et μ_0 assez petits pour que la valeur absolue de l'un quelconque d'entre eux reste plus grand que h quand $|\mu|$ reste plus petit que μ_0.

Alors l'inverse d'un diviseur (5) *quelconque* est développable suivant les puissances de μ et les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux de

$$\frac{1}{h\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Nous avons écrit plus haut:

$$H_i^p = \Sigma C\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

D'après nos hypothèses, C peut être développé suivant les puissances de μ de telle sorte que je puis poser:

$$C = \Sigma E\mu^l, \qquad H_i^p = \Sigma E\mu^l \eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

Reprenons maintenant les équations $(2'')$ en y faisant:

$$\varepsilon = h\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right),$$

$$\overline{H}_i^p = \Sigma \,|\, E \,|\, \mu^l \eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les seconds membres des équations $(2'')$ seront alors des séries convergentes ordonnées selon les puissances de μ, de $\eta_1, \eta_2, \ldots$ et η_n.

On en tirera les η_i sous la forme de séries $(4'')$ convergentes et ordonnées suivant les puissances de μ, $A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_k e^{\alpha_k t}$.

Des équations $(2')$ nous tirerions d'autre part les η_i sous la forme de séries $(4')$ ordonnées suivant les puissances de μ, $A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_k e^{\alpha_k t}, e^{t\sqrt{-1}}, e^{-t\sqrt{-1}}$. Chacun des termes de $(4')$ est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant de $(4'')$ et comme les séries $(4'')$ convergent, il en sera de même des séries $(4')$.

§ 14. *Solutions asymptotiques des équations de la dynamique.*

Reprenons les équations (1) du § 11

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et les hypothèses faites à leur sujet au début de ce § 11.

Nous avons vu dans ce § 11 que ces équations admettent des solutions périodiques et nous pouvons en conclure que pourvu que l'un des exposants caractéristiques α correspondants soit réel, ces équations admettront aussi des solutions asymptotiques.

A la fin du paragraphe précédent, nous avons envisagé le cas où dans les équations (1) dudit § 13, les seconds membres X_i sont développables suivant les puissances de μ, mais où les exposants caractéristiques restent distincts les uns des autres pour $\mu = 0$.

Dans le cas des équations qui vont maintenant nous occuper, c'est à dire des équations (1) des §§ 11 et 14, les seconds membres sont encore développables selon les puissances de μ; mais tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$.

Il en résulte un grand nombre de différences importantes.

En premier lieu les exposants caractéristiques α ne sont pas développables suivant les puissances de μ, mais suivant celles de $\sqrt{\mu}$ (cf. § 12). De même les fonctions que j'ai appelées $\varphi_{i.k}$ au début du § 13 (et qui, dans le cas particulier des équations de la dynamique qui nous occupe ici, ne sont autres que les fonctions S_i et T_i du § 12) sont développables, non suivant les puissances de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Alors dans les équations (2') du § 13:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

le second membre H_i est développé suivant les puissances des η, de $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$ et de $\sqrt{\mu}$ (et non pas de μ).

On en tirera les η_i sous la forme des séries obtenues au paragraphe précédent

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1'^{\beta_1} A_2'^{\beta_2} \ldots A_n'^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\Sigma\alpha\beta + \gamma\sqrt{-1}]}$$

et N et Π seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Un certain nombre de questions se pose alors naturellement:

1°. Nous savons que N et Π sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; en est-il de même du quotient $\frac{N}{\Pi}$?

2°. S'il en est ainsi, il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{\alpha_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont *formellement* aux équations proposées; ces séries sont-elles convergentes?

3°. Si elles ne sont pas convergentes, quel parti peut on en tirer pour le calcul des solutions asymptotiques.

Je me propose de démontrer que l'on peut développer $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et que par conséquent il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{\alpha_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont

formellement aux équations (1). On pourrait en douter; en effet Π est le produit d'un certain nombre des diviseurs (5) du paragraphe précédent. Tous ces diviseurs sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais quelques-uns d'entre eux, ceux pour lesquels γ est nul, s'annulent avec $\sqrt{\mu}$. Il peut donc arriver que Π s'annule avec μ et contienne en facteur une certaine puissance de $\sqrt{\mu}$. Si alors N ne contenait pas cette même puissance en facteur, le quotient $\frac{N}{\Pi}$ se développerait encore selon les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, mais le développement commencerait par des puissances négatives.

Je dis qu'il n'en est pas ainsi et que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne contient que des puissances positives de $\sqrt{\mu}$.

Voyons par quel mécanisme ces puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ disparaissent. Posons:

$$A_i e^{\alpha_i t} = w_i$$

et considérons les x et les y comme des fonctions des variables t et w.

Il importe avant d'aller plus loin de faire la remarque suivante: parmi les $2n$ exposants caractéristiques α, deux sont nuls et les autres sont deux à deux égaux et de signe contraire. Nous ne conserverons que $n - 1$ au plus de ces exposants en convenant de regarder comme nuls les coefficients A_i et les variables w_i qui correspondent aux $n + 1$ exposants rejetés. Nous ne conserverons que ceux de ces exposants dont la partie réelle est positive.

Cela posé, les équations (1) deviennent:

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i}, \tag{2}$$

$$\frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{3}$$

Cherchons, en partant de ces équations, à développer les x_i et les $y_i - n_i t$ suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et des w de telle façon que les coefficients soient des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire:

$$\alpha_k = \alpha_k^1 \sqrt{\mu} + \alpha_k^2 \mu + \ldots = \sum \alpha_k^p \mu^{\frac{p}{2}}$$

car nous avons vu au § 12 comment on peut développer les exposants caractéristiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Ecrivons d'autre part:

$$x_i = x_i^0 + x_i^1\sqrt{\mu} + \ldots = \sum x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1\sqrt{\mu} + \ldots = \sum y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p et les y_i^p étant des fonctions de t et des w, périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances de w.

Si dans les équations (2) et (3) nous substituons ces valeurs à la place de α_k, des x_i et des y_i; les deux membres de ces équations seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Egalons dans les deux membres des équations (2) les coefficients de $\mu^{\frac{p+1}{2}}$, et dans les deux membres des équations (3) les coefficients de $\mu^{\frac{p}{2}}$, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_i^{p+1}}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} &= Z_i^p + \sum_k \frac{d^2F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}, \\ \frac{dy_i^p}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} &= T_i^p - \sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} x_k^p, \end{aligned}$$

où Z_i^p et T_i^p ne dépendent que de

$$x_i^0,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{p-1},$$

$$y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{p-2}.$$

Convenons, comme nous l'avons fait plus haut, de représenter par $[U]$ la valeur moyenne de U, si U est une fonction périodique de t.

Des équations (4) nous pourrons alors déduire les suivantes:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[x_i^p]}{dw_k} &= [Z_i^p] + \sum_k \left[\frac{d^2F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}\right], \\ \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} &= [T_i^p] - \sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} [x_k^p]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'un calcul préalable nous ait fait connaître:

$$x_i^0,\, x_i^1,\, \ldots,\, x_i^{p-1},\, x_i^p - [x_i^p],$$
$$y_i^0,\, y_i^1,\, \ldots,\, y_i^{p-2},\, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}].$$

Les équations (5) vont nous permettre de calculer $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ et par conséquent x_i^p et y_i^{p-1}. Les équations (4) nous permettront ensuite de déterminer

$$x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}] \quad \text{et} \quad y_i^p - [y_i^p],$$

de sorte que ce procédé nous fournira par récurrence tous les coefficients des développements de x_i et de y_i.

La seule difficulté est la détermination de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ par les équations (5).

Les fonctions $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ sont développées suivant les puissances croissantes des w et nous allons calculer les divers termes de ces développements en commençant par les termes du degré le moins élevé.

Pour cela nous allons reprendre les notations du § 12, c'est à dire que nous allons poser:

$$-\frac{d^2F_0}{dx_i^0\,dx_k^0} = C_{ik}^0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{d^2F_1}{dy_i^0\,dy_k^0}\right] = b_{ik}$$

(pour les valeurs nulles de w).

Si alors nous appelons ξ_i et η_i les coefficients de

$$w_1^{m_1} w_2^{m_2} \ldots w_{n-1}^{m_{n-1}}$$

dans $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$, nous aurons pour déterminer ces coefficients les équations suivantes:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\textstyle\sum_k b_{ik}\eta_k - S\xi_i = \lambda_i, \\ &\textstyle\sum_k C_{ik}^0 \xi_k - S\eta_i = \mu_i. \end{aligned}$$

Dans ces équations (6) λ_i et μ_i sont des quantités connues, parce qu'elles ne dépendent que de

$$x_i^0,\, x_i^1,\, \ldots,\, x_i^{p-1},\, x_i^p - [x_i^p],$$
$$y_i^0,\, y_i^1,\, \ldots,\, y_i^{p-2},\, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}]$$

ou des termes de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ dont le degré par rapport aux w est plus petit que:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}.$$

De plus nous avons posé pour abréger

$$S = m_1\alpha_1^1 + m_2\alpha_2^1 + \ldots + m_{n-1}\alpha_{n-1}^1.$$

Nous avons donc pour le calcul des coefficients ξ_i et η_i un système d'équations linéaires. Il ne pourrait y avoir de difficulté que si le déterminant de ces équations était nul; or ce déterminant est égal à:

$$S^2[S^2 - (\alpha_1^1)^2][S^2 - (\alpha_2^1)^2] \ldots [S^2 - (\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Il ne pourrait s'annuler que pour:

$$S = 0, \qquad S = \pm\, \alpha_i^1,$$

c'est à dire pour

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} = 0 \text{ ou } 1.$$

On ne pourrait donc rencontrer de difficulté que dans le calcul des termes du degré 0 ou 1 par rapport aux w.

Mais nous n'avons pas à revenir sur le calcul de ces termes; en effet nous avons appris à calculer les termes indépendants des w dans le § 11 et les coefficients de

$$w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

dans le § 12.

Les termes indépendants des w ne sont en effet autre chose que les séries (8) du § 11 et les coefficients de

$$w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

ne sont autre chose que les séries S_i et T_i du § 12.

Il me reste à dire un mot des premières approximations.

Nous donnerons aux x_i^0 des valeurs constantes qui ne sont autres que celles que nous avons désignées ainsi au § 11.

Nous aurons alors les équations suivantes:

$$(7) \quad \begin{gathered} \frac{dy_i^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_i^1}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} x_k^1, \\ \frac{dx_i^2}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{dF_1}{dy_i^0}. \end{gathered}$$

Dans F_0 qui ne dépend que des x_i, ces quantités doivent être remplacés par x_i^0. Dans F_1 les x_i sont remplacés par x_i^0 et les y_i par $n_i t$. F_1 devient alors une fonction périodique de t dont la période est T. Nous désignerons par ψ comme dans les §§ 11 et 12 la valeur moyenne de cette fonction périodique F_1; ψ est alors une fonction périodique et de période 2π par rapport aux y_i^0.

Les deux premières équations (7) montrent que les y_i^0 et les x_i^1 ne dépendent que des w. En égalant dans les deux dernières équations (7) les valeurs moyennes des deux membres, il vient:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sum \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} &= \Sigma C_{ik}^0 x_k^1, \\ \sum \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} &= \frac{d\psi}{dy_i^0}. \end{aligned}$$

Ces équations (8) doivent servir à déterminer les y_i^0 et les x_i^1 en fonctions des w. Peut-on satisfaire à ces équations en substituant à la place des y_i^0 et des x_i^1 des séries développées suivant les puissances des w?

Pour nous en rendre compte envisageons les équations différentielles suivantes:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_i^0}{dt} &= \Sigma C_{ik}^0 x_k^1, \\ \frac{dx_i^1}{dt} &= \frac{d\psi}{dy_i^0}. \end{aligned}$$

Ces équations différentielles où les fonctions inconnues sont les y_i^0 et les x_i^1, admettront une solution périodique

$$x_i^1 = 0, \qquad y_i^0 = \varpi_i,$$

ϖ_i étant la quantité désignée ainsi au § 11.

Les exposants caractéristiques relatifs à cette solution périodique sont précisément les quantités α_k^1. Parmi ces quantités nous sommes convenus de ne conserver que celles dont la partie réelle est positive. Les équations (9) admettent un système de solutions asymptotiques et il est aisé de voir que ces solutions se présentent sous la forme de séries développées suivant les puissances des w. Ces séries satisferont alors aux équations (8). Ces équations peuvent donc être résolues.

Les x_i^1 et les y_i^0 étant ainsi déterminés, le reste du calcul ne présente plus comme nous l'avons vu aucune difficulté. Il existe donc des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui satisfont formellement aux équations (1).

Cela prouve que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne débute jamais par une puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Malheureusement les séries ainsi obtenues ne sont pas convergentes. Soit en effet:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}\,\gamma + \Sigma \alpha_i\beta - \alpha_i}.$$

Si γ n'est pas nul, cette expression est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais le rayon de convergence de la série ainsi obtenue tend vers 0 quand $\frac{\gamma}{\Sigma\beta}$ tend vers 0.

Si donc on développe les diverses quantités $\frac{1}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ on pourra toujours parmi ces quantités, en trouver une infinité pour lesquelles le rayon de convergence du développement est aussi petit qu'on le veut.

On pourrait encore espérer, quelque invraisemblable que cela puisse paraître, qu'il n'en est pas de même pour les développements des diverses quantités $\frac{N}{\Pi}$; mais nous verrons dans la suite d'une façon rigoureuse qu'il n'est pas ainsi en général; il faut donc renoncer à ce faible espoir et conclure que les séries que nous venons de former sont divergentes.

Mais quoiqu'elles soient divergentes ne peut-on en tirer quelque parti?

Considérons d'abord la série suivante qui est plus simple que celles que nous avons en vue

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1 + n\mu}.$$

Cette série converge uniformément quand μ reste positif et que w reste plus petit en valeur absolue qu'un certain nombre positif w_0 plus petit que 1. De même la série:

$$\frac{1}{\underline{|p}}\frac{d^p F(w, \mu)}{d\mu^p} = \pm \sum \frac{n^{p-1} w^n}{(1 + n\mu)^p}$$

converge uniformément.

Si maintenant l'on cherche à développer $F(w, \mu)$ suivant les puissances de μ, la série à laquelle on est conduit

$$\Sigma w^n (-n)^p \mu^p \tag{10}$$

ne converge pas. Si dans cette série on néglige tous les termes où l'exposant de μ est supérieur à p, on obtient une certaine fonction

$$\Phi_p(w, \mu).$$

Il est aisé de voir que l'expression:

$$\frac{F(w, \mu) - \Phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$$

tend vers 0 quand μ tend vers 0 par valeurs positives, de sorte que la série (10) représente asymptotiquement la fonction $F(w, \mu)$ pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente asymptotiquement la fonction eulérienne pour les grandes valeurs de x.

Les séries divergentes que nous avons appris à former dans le présent paragraphe sont tout à fait analogues à la série (10).

Considérons en effet l'une des séries:

$$\sum \frac{N}{\Pi} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}} = F(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t) \tag{10'}$$

et

$$\Sigma w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}} \frac{d^p\left(\frac{N}{\Pi}\right)}{(d\sqrt{\mu})^p} = \frac{d^p F}{(d\sqrt{\mu})^p};$$

ces séries sont uniformément convergentes pourvu que les w restent inférieurs en valeur absolue à certaines limites et que $\sqrt{\mu}$ reste réel.

Si l'on développe $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, les séries (10') sont divergentes ainsi que nous l'avons dit. Supposons qu'on néglige dans le développement les termes où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est supérieur à p, on obtiendra une certaine fonction

$$\Phi_p(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t)$$

qui sera développable suivant les puissances des w, de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sera un polynôme de degré p en $\sqrt{\mu}$.

On voit alors que l'expression

$$\frac{F - \Phi_p}{\sqrt{\mu^p}}$$

tend vers o quand μ tend vers o pas valeurs positives, et cela quelque grand que soit p.

En effet si l'on désigne par H_p l'ensemble des termes du développement de $\frac{N}{\Pi}$ où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est au plus égal à p, on a:

$$\frac{F - \Phi_p}{\sqrt{\mu^p}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\mu^p}} \left(\frac{N}{\Pi} - H_p \right) w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}}$$

et la série du second membre est *uniformément* convergente et tous ses termes tendent vers o quand μ tend vers o.

On peut donc dire que les séries que nous avons obtenues dans le présent § 14 représentent les solutions asymptotiques pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente les fonctions eulériennes.

On s'en rendra d'ailleurs mieux compte de la manière suivante; supposons deux degrés de liberté seulement pour fixer les idées; alors nous ne conserverons plus qu'une seule des quantités w et nous pourrons écrire nos équations sous la forme suivante:

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} + \alpha w \frac{dy_i}{dw} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,2)$$

en supprimant les indices d'α et de w devenus inutiles.

Nous savons qu'α est développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu}$ et par conséquent α^2 suivant les puissances de μ; inversement μ est développable suivant les puissances de α^2; nous pouvons remplacer μ par ce développement de sorte que F sera développé suivant les puissances de α^2. Pour $\alpha = 0$, F se réduit à F_0 qui ne dépend que de x_1 et de x_2.

Soit:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

la solution périodique qui nous sert de point de départ. Posons, comme au § 12

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i$$

nos équations deviendront:

$$(11)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = H_i.$$

Ξ_i et H_i sont développés suivant les puissances des ξ_i, des η_i et de α^2; et les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Pour $\alpha = 0$, $\frac{dF}{dy_i}$ et par conséquent Ξ_i s'annulent; donc Ξ_i est divisible par α^2 et je puis poser:

$$\Xi_i = \alpha^2 X_i + \alpha^2 X'_i,$$

$\alpha^2 X_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et aux η, et $\alpha^2 X'_i$ représentant l'ensemble des termes de degré supérieur.

De même, quand α est nul, $\frac{dF}{dx_i}$ et par conséquent H_i ne dépendent plus que des ξ_i et non des η_i.

Je puis donc poser:

$$H_i = Y_i + Y'_i + \alpha^2 Q_i + \alpha^2 Q'_i,$$

$Y_i + \alpha^2 Q_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et η, pendant que $Y'_i + \alpha^2 Q'_i$ représentent l'ensemble des termes de degré supérieur au premier. Je suppose en outre que Y_i et Y'_i ne dépendent que de ξ_1 et de ξ_2.

Posons

$$\xi_1 = \alpha\zeta_1, \qquad \xi_2 = \alpha\zeta_2,$$

Y_i deviendra divisible par α et Y'_i par α^2 de sorte que je pourrai poser:

$$Y_i + \alpha^2 Q_i = \alpha Z_i, \qquad Y'_i + \alpha^2 Q'_i = \alpha^2 Z'_i$$

et que nos équations deviendront:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\zeta_i}{dw} &= \alpha X_i + \alpha X'_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} &= \alpha Z_i + \alpha^2 Z'_i. \end{aligned}$$

Considérons les équations:

$$(13) \qquad \frac{d\zeta_i}{dt} = \alpha X_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \alpha Z_i.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux inconnues ζ_i et η_i. Elles ne diffèrent pas des équations (2) du § 12, sinon parce que ξ_1 et ξ_2 y sont remplacés par $\alpha\zeta_1$ et $\alpha\zeta_2$. D'après ce que nous avons vu au § 12, l'équation qui définit les exposants caractéristiques admet 4 racines, l'une égale à $+\alpha$, l'autre à $-\alpha$ et les deux autres à 0.

A la première racine, c'est à dire à la racine $+\alpha$, correspondra une solution des équations (2) du § 12 que nous avons appris à former dans ce § 12 et que nous avons écrite ainsi:

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t} T_i.$$

Je rappelle que S_i^0 est nul et par conséquent que S_i est divisible par α.

A la seconde racine $-\alpha$ correspondra de même une autre solution des équations (2) et nous l'écrirons:

$$\xi_i = e^{-\alpha t} S_i', \qquad \eta_i = e^{-\alpha t} T_i'.$$

Enfin aux deux racines 0, correspondront deux solutions des équations (2) que nous écrirons:

$$\xi_i = S_i'', \qquad \eta_i = T_i'',$$

$$\xi_i = S_i''' + \alpha t S_i'', \qquad \eta_i = T_i''' + \alpha t T_i''.$$

T_i', T_i'', T_i''', S_i', S_i'', S_i''' sont des fonctions périodiques de t, comme S_i et T_i.

De plus S_i', S_i'', S_i''' seront comme S_i divisibles par α.

Posons alors:

$$\alpha\zeta_1 = S_1\theta_1 + S_1'\theta_2 + S_1''\theta_3 + S_1'''\theta_4,$$

$$\alpha\zeta_2 = S_2\theta_1 + S_2'\theta_2 + S_2''\theta_3 + S_2'''\theta_4,$$

$$\eta_1 = T_1\theta_1 + T_1'\theta_2 + T_1''\theta_3 + T_1'''\theta_4,$$

$$\eta_2 = T_2\theta_1 + T_2'\theta_2 + T_2''\theta_3 + T_2'''\theta_4.$$

Les fonctions θ_i ainsi définies joueront un rôle analogue à celui des fonctions η_i du § 13. Les équations (12) deviennent alors

$$(14)\qquad \begin{gathered} \frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} - \alpha\theta_1 = \alpha\Theta_1, \qquad \frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} + \alpha\theta_2 = \alpha\Theta_2, \\ \frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} = \alpha\theta_4 + \alpha\Theta_3. \qquad \frac{d\theta_4}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_4}{dw} = \alpha\Theta_4. \end{gathered}$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4 sont des fonctions développées suivant les puissances de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et α dont tous les termes sont du 2[d] degré au moins par rapport aux θ, et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t. De plus les θ doivent être des fonctions périodiques de t et les termes du 1[er] degré en w dans θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 doivent se réduire a w, 0, 0 et 0.

Ces équations (14) sont analogues aux équations (2′) du § 13.

Cela posé, soit Φ une fonction qui, de même que Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4, soit développée suivant les puissances de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, de α, $e^{t\sqrt{-1}}$ et $e^{-t\sqrt{-1}}$ et qui soit telle que chacun de ses coefficients soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient du terme correspondant dans Θ_1, Θ_2, Θ_3 et Θ_4; tous les termes de Φ seront d'ailleurs, comme ceux des Θ_i, du second degré au moins par rapport aux θ.

Observons que le nombre

$$\frac{n\sqrt{-1}}{\alpha} + p$$

(où n est entier positif, négatif ou nul, et où p est entier positif et au moins égal à 1) est toujours plus grand en valeur absolue que 1, quels que soient d'ailleurs n, p et α.

Formons alors les équations:

$$(15)\qquad \theta_1 = w + \Phi, \qquad \theta_2 = \Phi, \qquad \theta_3 = \theta_4 + \Phi, \qquad \theta_4 = \Phi$$

qui sont analogues aux équations (2″) du § 13.

Des équations (14) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sont analogues aux séries (4′) du § 13. Des équations (15) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des mêmes variables et analogues aux séries (4″) du § 13. Chacun des termes de ces dernières

séries est positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant des premières séries; si donc elles convergent, il en est de même des séries tirées des équations (14).

Or il est aisé de voir que l'on peut trouver un nombre w_0 indépendant de α, tel que si $|w| < w_0$, les séries tirées de (15) convergent.

Il en résulte que les séries ordonnées suivant les puissances de w et tirées de (14) convergent uniformément quelque petit que soit α et par conséquent quelque petit que soit μ, ainsi que je l'ai annoncé plus haut.

Nous possédons maintenant les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$; les coefficients sont des fonctions connues de α. Si on développe chacun de ces coefficients suivant les puissances de α, on obtiendra les θ développés suivant les puissances de α. Les séries ainsi obtenues sont divergentes, comme nous l'avons vu plus haut; soient néanmoins:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \ldots \tag{16}$$

ces séries.

Posons:

$$H_1 = \theta_1 + \theta_1, \qquad H_2 = \theta_2 - \theta_2, \qquad H_3 = \theta_3 + \theta_4, \qquad H_4 = \theta_4.$$

Posons:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \alpha^p u_i \tag{17}$$

en égalant θ_i aux $p + 1$ premiers termes de la série (16) plus un terme complementaire $\alpha^p u_i$.

Si dans H_i on remplace les θ_i par leurs développements (17), les H_i peuvent se développer suivant les puissances de α et on peut écrire:

$$H_i = \Theta_i^0 + \alpha\Theta_i^1 + \alpha^2\Theta_i^2 + \ldots + \alpha^{p-1}\Theta_i^{p-1} + \alpha^p U_i,$$

les Θ_i^k étant indépendants de α pendant que U_i est développable suivant les puissances de α.

On aura alors les équations:

$$\begin{gathered} \frac{d\theta_i^0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta_i^1}{dt} + w\frac{d\theta_i^0}{dw} = \Theta_i^0, \\ \frac{d\theta_i^2}{dt} + w\frac{d\theta_i^1}{dw} = \Theta_i^1, \quad \ldots, \quad \frac{d\theta_i^p}{dt} + w\frac{d\theta_i^{p-1}}{dt} = \Theta_i^{p-1} \end{gathered} \tag{18}$$

et ensuite:

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_i}{dw} + \alpha w \frac{d\theta_i^p}{dw} = \alpha U_i. \tag{19}$$

Voici quelle est la forme de la fonction U_i; les quantités θ_i^k peuvent être regardées comme des fonctions connues de t et de w, définies par les équations (18) et par l'équation (20) que j'écrirai plus loin; pendant que les u_i restent les fonctions inconnues. Alors U_i est une fonction développée suivant les puissances de w, de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, de α et des u_i. De plus tout terme du q^e degré par rapport aux u_i est au moins du degré $p(q-1)$ par rapport à α.

Soit U_i^0 ce que devient U_i quand on y annule α et les u_i; on aura:

$$w\frac{d[\theta_i^p]}{dw} = [U_i^0]. \tag{20}$$

Je puis ensuite, en posant:

$$U_i' = U_i - w\frac{d\theta_i^p}{dw}$$

puis:

$$V_1 = U_1' - u_1, \qquad V_2 = U_2' + u_2, \qquad V_3 = U_3' - u_4, \qquad V_4 = U_4',$$

mettre les équations (19) sous la forme:

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} + \alpha w\frac{du_1}{dw} - \alpha u_1 = \alpha V_1, \qquad \frac{du_2}{dt} + \alpha w\frac{du_2}{dw} + \alpha u_2 = \alpha V_2, \\ &\frac{du_3}{dt} + \alpha w\frac{du_3}{dw} - \alpha u_4 = \alpha V_3, \qquad \frac{du_4}{dt} + \alpha w\frac{du_4}{dw} = \alpha V_4. \end{aligned} \tag{21}$$

On voit alors que les V_i ne contiennent que des termes du 2^d degré au moins par rapport à w et aux u_i.

En effet les θ_i sont divisibles par w et se réduisent à w ou à 0 quand on y supprime les termes de degré supérieur au premier en w. Il en résulte d'abord que θ_i^p est divisible par w^2. D'autre part le second membre de l'équation (17) ne contiendra que des termes du 1^{er} degré au moins par rapport à w et u_i. Donc θ_i ne contient que des termes du 2^d degré au moins par rapport à w et aux u_i. Il en résulte que les

seuls termes du 1^er degré qui peuvent subsister dans U_1, U_2, U_3 et U_4 se réduisent respectivement à u_1, $-u_2$, u_4 et 0.

D'ailleurs $w\dfrac{d\theta_i^p}{dw}$ est divisible par w^2; donc les V_i ne contiennent que des termes du 2^d degré au moins.

C. Q. F. D.

Des équations (21) on peut tirer les u_i sous la forme de séries développées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$. En appliquant à ces équations le même raisonnement qu'aux équations (14) on peut démontrer que ces séries convergent quand $|w| < w_0$ et que la convergence reste uniforme quelque petit que soit α.

Il en est de même pour les séries qui représentent $\dfrac{du_i}{dw}$, $\dfrac{d^2u_i}{dw^2}$ etc.

Il résulte de là qu'on peut assigner une limite supérieure indépendante de α, à u_i, à $\dfrac{du_i}{dw}$, $\dfrac{d^2u_i}{dw^2}$ etc., pourvu que $|w| < w_0$.

Mais je veux démontrer maintenant que cela a encore lieu pour toutes les valeurs positives de w.

Reprenons les équations:

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w\frac{du_i}{dw} = U_i'.$$

U_i' peut être regardée comme une série développée suivant les puissances de α et des u_i et dont les coefficients sont des fonctions de t et de w. Je dis que cette série reste convergente quels que soient t et w pourvu que α et les u_i soient assez petits. En effet elle ne pourrait cesser de converger que si la fonction:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

cessait d'être développable suivant les puissances de α, des v_i et des v_i' quand on y remplace x_i par:

$$x_i^0 + \alpha x_i^1 + \alpha^2 x_i^2 + \ldots + \alpha^{p+1}x_i^{p+1} + \alpha^{p+1}v_i$$

et y_i par:

$$n_i t + y_i^0 + \alpha y_i^1 + \alpha^2 y_i^2 + \ldots + \alpha^p y_i^p + \alpha^p v_i',$$

ou, ce qui revient au même, si la fonction F pour une valeur quelconque de t ou de w (c'est à dire pour un système quelconque de valeurs de t, de y_1^0 et de y_2^0) cessait d'être développable suivant les puissances de $x_i - x_i^0$, et de $y_i - n_i t - y_i^0$. Or il est manifeste qu'il n'en est pas ainsi.

Je puis donc toujours trouver une fonction Φ développée suivant les puissances de α et des u_i, mais dont les coefficients sont des constantes au lieu d'être fonctions de t et de w comme ceux de U_i'; et de plus m'arranger de telle sorte que le coefficient d'un terme quelconque de Φ soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de U_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$, au moins pour les valeurs de t et de w que j'aurai à considérer.

J'ajouterai que, d'après la forme particulière des fonctions U_i', je puis trouver deux nombres réels positifs M et β tels que la fonction Φ satisfasse à la condition que je viens d'énoncer si je prends:

$$\Phi = \frac{M(1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}{1 - \beta\alpha - \beta\alpha^p(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}.$$

Si je considère les valeurs de w positives et inférieures à une certaine limite W, je devrai prendre, pour satisfaire à cette condition, de nombres M et β d'autant plus grands que W sera plus grand; mais tant que W sera fini, les nombres M et β seront eux-mêmes finis.

Soit maintenant w_1 une valeur positive de w plus petite que w_0. D'après ce que nous avons vu plus haut, il est possible d'assigner pour $w = w_1$ une limite supérieure à u_1, u_2, u_3 et u_4; soit u_0 cette limite, on aura donc

$$|u_i| < u_0 \quad \text{pour } w = w_1.$$

Soit maintenant u' une fonction définie par les conditions suivantes

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \frac{\alpha M(4u' + 1)}{1 - \beta\alpha - 4\beta\alpha^p u'},$$

$$u' = u_0 \quad \text{pour } w = w_1.$$

On aura manifestement pour toutes les valeurs de t et de w:

$$|u_i| < u'. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Or on trouve sans peine:

$$\frac{1 - \beta a + \beta a^p}{4M} \log \frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} - \frac{\beta a^p}{M}(u' - u_0) = \log \frac{w}{w_1}$$

et pour $\alpha = 0$, on trouve:

$$\frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} = \left(\frac{w}{w_1}\right)^{4M},$$

ce qui montre que u' reste finie quand α tend vers 0.

Nous devons en conclure que les quantités u_i restent également finies quand α tend vers 0.

Il résulte de là que la série

$$\theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots$$

représente la fonction θ_i *asymptotiquement* (c'est à dire à la façon de la série de Stirling) ou en d'autres termes que l'expression:

$$\frac{\theta_i - \theta_i^0 - \alpha\theta_i^1 - \alpha^2\theta_i^2 - \ldots - \alpha^{p-1}\theta_i^{p-1}}{\alpha^{p-1}}$$

tend vers 0 avec α. En effet cette expression est égale à:

$$\alpha(\theta_i^p + u_i)$$

et nous venons de voir que $\theta_i^p + u_i$ reste fini quand α tend vers 0.

Mais ce n'est pas tout; je dis que $\frac{du_i}{dw}$ reste fini quand α tend vers 0.

Nous avons en effet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha w \frac{d}{dw}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha\left(\frac{du_i}{dw}\right) = \alpha \sum_k \frac{dU_i'}{du_k}\frac{du_k}{dw} + \alpha\frac{dU_i'}{dw}.$$

$\frac{dU_i'}{du_k}$ et $\frac{dU_i'}{dw}$ sont des fonctions de t, de w, de α et des u_i; mais d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons assigner aux u_i des limites supérieures; nous pourrons donc en assigner également aux $\frac{dU_i'}{du_k}$ et aux $\frac{dU_i'}{dw}$. Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left|\frac{dU_i'}{du_k}\right| < A, \qquad \left|\frac{dU_i'}{dw}\right| < B \quad (\text{pour } w < W),$$

A et B étant deux nombres positifs.

D'autre part, nous savons qu'on peut assigner une limite à $\frac{du_i}{dw}$ pour $w = w_1$.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u_0' \quad \text{pour } w = w_1,$$

u_0' étant un nombre positif. Soit ensuite u' une fonction définie comme il suit:

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \alpha u'(4A + W) + \alpha B,$$

$$u' = u_0' \quad \text{pour } w = w_1$$

On aura manifestement:

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u'.$$

Or on voit sans peine que u' ne dépend que de w et satisfait à l'équation

$$w\frac{du'}{dw} = u'(4A + W) + B.$$

Donc u' est fini; donc $\frac{du_i}{dw}$ reste finie quand α tend vers o. Donc on a *asymptotiquement* (en entendant ce mot au même sens que plus haut):

$$\frac{d\theta_i}{dw} = \frac{d\theta_i^0}{dw} + \alpha\frac{d\theta_i^1}{dw} + \alpha^2\frac{d\theta_i^2}{dw} + \ldots.$$

On démontrerait de même que l'on a asymptotiquement:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{d\theta_i^0}{dt} + \alpha\frac{d\theta_i^1}{dt} + \alpha^2\frac{d\theta_i^2}{dt^2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2\theta_i}{dw^2} = \frac{d^2\theta_i^0}{dw^2} + \alpha\frac{d^2\theta_i^1}{dw^2} + \alpha^2\frac{d^2\theta_i^2}{dw^2} + \ldots.$$

Voici donc la conclusion finale à laquelle nous parvenons:

Les séries:

$$x_i^0 + \sqrt{\mu}x_i^1 + \mu x_i^2 + \ldots, \qquad n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}y_i^1 + \mu y_i^2 + \ldots$$

définies dans ce paragraphe sont divergentes, mais elles jouissent de la même propriété que la série de STIRLING de telle sorte qu'on a asymptotiquement:

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu}x_i^1 + \mu x_i^2 + \ldots,$$

$$y_i = n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}y_i^1 + \mu y_i^2 \ldots$$

De plus si D est un signe quelconque de différentiation, c'est à dire si l'on pose:

$$Df = \frac{d^{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k} f}{dt^{\lambda_0} dw_1^{\lambda_1} dw_2^{\lambda_2} \ldots dw_k^{\lambda_k}}$$

on aura encore asymptotiquement:

$$Dx_i = Dx_i^0 + \sqrt{\mu}Dx_i^1 + \mu Dx_i^2 + \ldots,$$

$$Dy_i = D(n_i t + y_i^0) + \sqrt{\mu}Dy_i^1 + \mu Dy_i^2 + \ldots.$$

En ce qui concerne l'étude des séries analogues à celles de STIRLING je renverrai au § 1 d'un mémoire que j'ai publié dans les *Acta mathematica* (tome 8, page 295).

Deuxième partie.

Equations de la dynamique et problème des n corps.

CHAPITRE I.

Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

§ 15. *Représentations géométriques diverses.*

Reprenons les équations (1) du § 11

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}.
\end{aligned}
$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposerons donc que la fonction F ne dépend que de quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2. Nous supposerons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

La situation du système est donc définie par les quatre quantités x_1, x_2, y_1, y_2, mais cette situation ne change pas quand y_1 ou y_2 augmente de 2π ou d'un multiple de 2π. En d'autres termes, et pour reprendre le langage du chapitre 1[er], x_1 et x_2 sont des variables linéaires, pendant que y_1 et y_2 sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante:

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

C désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités x et y ne sont plus indépendantes; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quantités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point P dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables x et y soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités:

$$(3) \qquad \varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0.$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent:

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque x_1 satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable x_2 en fonction uniforme des trois autres x_1, y_1 et y_2.

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)],$$

$$Z = \sin y_2(cx_1 + d),$$

c et d étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1 \,;\, cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est à dire à tout système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions:

$$a > x_1 > b\,,\; 2\pi > y_1 > 0\,,\; 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores:

$$(4) \qquad \begin{aligned} (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (cb + d)^2, \\ (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (ca + d)^2. \end{aligned}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus $a > x_1 > b$; mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entrainent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus x_2 est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore:

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire ξ, jouissant de la propriété suivante. Si x_1, x_2, y_1 et y_2 satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer x_1 et x_2 en fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. De plus, en vertu des inégalités (3), ξ ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3)

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrons alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables ξ, y_1 et y_2, et la représenter par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)],$$
$$Z = \sin y_2(c\xi + d)$$

avec les conditions:

$$c \geqq 0, \quad ca + d < 1, \quad cb + d > 0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux

tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour $x_1 = a$, (ou plus généralement pour $\xi = a$) la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à y_2. Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées ρ et ω, mais que si on suppose $\rho = 0$, on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit ω.

Dans ce cas on choisira les constantes c et d de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle:

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle y_2 est indéterminé; mais néanmoins, comme pour $\xi = a$ la situation du système ne dépend pas de y_2, à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que réciproquement, à un point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (3), ξ puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que:

$$a = 0, \qquad b = +\infty.$$

Supposons que pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépende pas de y_2 et que pour $\xi = \infty$, cette situation ne dépende pas de y_1.

Nous pourrons alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour $\xi = 0$ il vient (quel que soit y_2)

$$X = \cos y_1, \qquad Y = \sin y_1, \qquad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de y_2; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour $\xi = 0$ ne dépend pas non plus de y_2.

Pour $\xi = \infty$, on trouve pourvu que $\cos y_2$ soit négatif:

$$X = Y = 0, \qquad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des Z et sa position ne dépend pas de y_1, mais pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas non plus de y_1.

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la lune se mouvant sous l'influence du soleil et de la terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouvement en adoptant les notations de M. Tisserand dans sa Note des Comptes rendus du 31 janvier 1887:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dl}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}. \end{aligned}$$

Je désigne par a, e et n le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse; j'appelle l l'anomalie moyenne de cette troisième masse et g la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite:

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}.$$

Je choisis les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que la longitude de cette seconde masse soit égale à t.

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux dernières masses est vue de la première ne diffère de $l + g - t$ que par une fonction périodique de l de période 2π.

La fonction R est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2}$. Cette fonction ne dépend que de L, de G, de l et de $l + g - t$; car la distance de la seconde masse à la première est constante et la distance de la troisième à la première ne dépend que de L, G et l. Cette fonction est d'ailleurs périodique de période 2π tant par rapport à l que par rapport à $l + g - t$.

On conclut de là que l'on a:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

et que les équations (5) admettent comme intégrale:

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des équations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser:

$$\begin{aligned} x_1 &= G, & x_2 &= L, \\ y_1 &= g - t, & y_2 &= l, \end{aligned}$$
$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = R + G,$$

et les équations (5) reprennent la forme:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F dépend d'un paramètre très petit μ qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F est périodique par rapport à y_1 et y_2 qui sont des variables angulaires, tandis que x_1 et x_2 sont des variables linéaires. Si l'on fait $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et:

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$$

ne dépend plus que des variables linéaires.

Il résulte de la définition même de L et de G en fonctions de a et e que l'on doit avoir:

$$L^2 > G^2 \quad \text{ou} \quad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que x_1 peut varier depuis $-x_2$ jusqu'à $+x_2$.

Si l'on suppose $x_1 = +x_2$, l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est à dire de:

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

On en déduit:

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où:

$$(6) \qquad \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de $x_1 - x_2$ est supposée nulle) que x_1 doit rester constamment égal à x_2; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions »particulières» que nous devons conserver,

l'équation (6) signifie simplement que quand $x_1 - x_2$ atteint la valeur o, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité $x_2^2 > x_1^2$.

Si nous supposons maintenant $x_2 = -x_1$, l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que x_1 et x_2 ne sont pas de même signe); alors F et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle:

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

ce qui donne:

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante:

Trouver une variable ξ telle que si x_1, x_2, y_1, y_2 satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à

$$F = C, \qquad x_2^2 > x_1^2)$$

ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Je traiterai d'abord la question dans le cas où $\mu = 0$ et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont:

$$X = x_1 - c, \qquad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \qquad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites:

$$X + c = \pm Y.$$

Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 4 et 5.

Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des x, mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 4, la courbe nous offre deux arcs utiles BC et DE pendant que les arcs AB et CD doivent être rejetés à cause de l'inégalité $Y^2 > (X+c)^2$. Dans le cas de la figure 5, il n'y a qu'un arc utile BC et l'arc AB doit être rejeté.

Fig. 4.

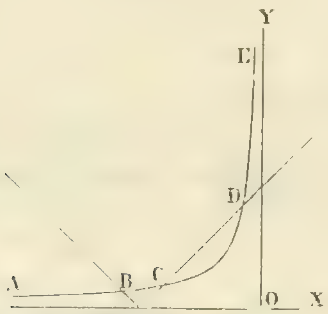
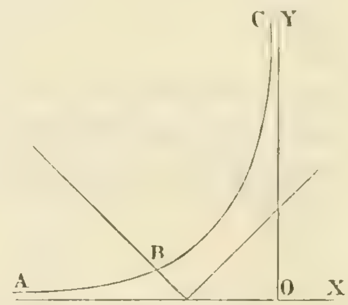


Fig. 5.



Le passage de la figure 4 à la figure 5 se fait quand la droite CD devenant tangente à la courbe, les deux points C et D se confondent. Cela a lieu pour:

$$C = \frac{3}{2}, \qquad X = -\frac{1}{2}, \qquad Y = 1.$$

Nous nous supposerons dans ce qui va suivre placés dans le cas de la figure 4 et nous envisagerons seulement l'arc utile BC; c'est en effet le cas le plus intéressant au point de vue des applications.

Posons:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que ξ s'annule au point C et devient infini au point B et que quand on parcourt l'arc BC depuis C jusqu'en B, on voit ξ croître constamment depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Si donc on se donne ξ, le point correspondant de l'arc BC sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que x_1 et x_2 sont fonctions uniformes de ξ.

Qu'arrivera-t-il maintenant si μ n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$F = C, \qquad \xi > 0, \qquad x_2 > 0,\text{[1]} \tag{7}$$

x_1 et x_2 seront encore fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. Pour qu'il cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$$

s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si μ est assez petit et si C est assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre ξ comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et x_1 et x_2 seront fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons:

$$x_1' = x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - x_2,$$
$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique:

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{dF}{dy_1'}, \qquad \frac{dy_1'}{dt} = -\frac{dF}{dx_1'},$$
$$\frac{dx_2'}{dt} = \frac{dF}{dy_2'}, \qquad \frac{dy_2'}{dt} = -\frac{dF}{dx_2'}.$$

[1] On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc BC comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des X, ce qui entraîne l'inégalité $x_2 > 0$; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de μ.

On voit que y'_1 et y'_2 sont encore des variables angulaires; quand en effet y'_1 ou y'_2 augmente d'un multiple de 2π, y_1 et y_2 augmentent aussi d'un multiple de 2π et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément y'_1 et y'_2 en $y'_1 + \pi$ et $y'_2 + \pi$, y_2 ne change pas et y_1 augmente de 2π. La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépend pas de y'_2 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0.$$

Pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas de y'_1 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des Z si $\cos y'_2$ est négatif et à l'infini si $\cos y'_2$ est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) et $(x'_1, x'_2, y'_1 + \pi, y'_2 + \pi)$ correspondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux:

$$\int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int (dx'_1 dy'_1 + dx'_2 dy'_2)$$

et

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx'_1 dy'_1 dx'_2 dy'_2.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le § 7 nous verrons que:

$$\int \frac{x_1'^2 \, d\xi \, dy'_1 \, dy'_2}{x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2}} = \int \frac{x_1'^2 \, dX \, dY \, dZ}{\left(x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2}\right) \xi (X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme ξ est essentiellement positif, la quantité sous le signe $\int$ est de même signe que:

$$x_1'\frac{dF}{dx_1'} + x_2'\frac{dF}{dx_2'} = x_1\frac{dF}{dx_1} + x_2\frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour $\mu = 0$, on trouve:

$$x_1\frac{dF}{dx_1} + x_2\frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_2^2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 4 et sur l'arc BC, nous devons supposer:

$$C > \frac{3}{2}, \; x_1^2 < x_2^2, \; 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire:

$$x_1 - \frac{1}{x_2^2} = 3x_1 - 2C < 3x_1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi $x_1\frac{dF}{dx_1} + x_2\frac{dF}{dx_2}$ est toujours négatif quand μ est nul. Il en sera encore de même quand μ cessera d'être nul, pourvu que C soit assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans ces conditions l'intégrale:

$$\int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\xi(X^2 + Y^2)\left(- x_1'\frac{dF}{dx_1'} - x_2'\frac{dF}{dx_2'}\right)}$$

est un invariant positif.

Pour $\mu = 0$, les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et on trouve:

$$L = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \qquad g = \text{const.}, \qquad l = nt + \text{const.}$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représentation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement n est un nombre

commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale

$$\xi = \text{const.}$$

et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand μ n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du § 11

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R,$$

R étant une fonction de ρ et de t, holomorphe par rapport à ρ et s'annulant avec ρ et périodique par rapport à t. Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

avec:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)d\rho + \eta$$

Posons:

$$\sigma = \sqrt{n}\sqrt{2x_1}\cos y_1, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1}\sin y_1.$$

Les équations conserveront la forme canonique des équations de la dynamique et la fonction F dépendra de deux variables linéaires x_1 et η et de deux variables angulaires y_1 et ξ.

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces vives C, x_1, y_1 et ξ, la quatrième variable η est entièrement déterminée; on a en effet:

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2}x_1^2\sin^2 y_1 + \mu\int R(\rho, \xi)d\rho.$$

Pour $x_1 = 0$, la situation du système ne dépend pas de y_1. Nous

pouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les coordonnées sont:

$$X = \cos \xi e^{x_1 \cos y_1}, \qquad Y = \sin \xi e^{x_1 \cos y_1}, \qquad Z = x_1 \sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace et inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe des Z qui nous donneraient $x_1 = \infty$ et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan des xy le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant un ensemble des termes du 3^{me} degré au moins en x et en y et μ un coefficient très petit.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variables en posant:

$$x = \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}} \cos y_1, \qquad x' = \sqrt{2x_1}\sqrt[4]{ga} \sin y_1,$$

$$y = \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}} \cos y_2, \qquad y' = \sqrt{2x_2}\sqrt[4]{gb} \sin y_2.$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga}\, x_1 + \sqrt{gb}\, x_2 + \mu g\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2, et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1^er^ ordre. Nous en conclurons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du 1^er^ ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$\left|\mu\frac{d\varphi}{dx_1}\right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \left|\mu\frac{d\varphi}{dx_2}\right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$(9) \qquad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi) + \mu g\varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi + \mu g\frac{d\varphi}{dx_1} + \mu\xi g\frac{d\varphi}{dx_2}.$$

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ, y_1 et y_2, et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1, y_2 et ξ.

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1, pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2.

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi\cos y_1}, \qquad Y = \sin y_2 e^{\xi\cos y_1}, \qquad Z = \xi\sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

CHAPITRE II.

Etude des surfaces asymptotiques.

§ 16. *Exposé du problème.*

Reprenons les équations de la dynamique en supposant deux degrés de liberté seulement, et par conséquent quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2. D'après ce que nous avons vu aux § 14 ces équations admettent certaines solutions particulières remarquables que nous avons appelées asymptotiques. Chacune de ces solutions asymptotiques est représentée, dans le système de représentation géométrique exposé au paragraphe précédent, par certaines courbes trajectoires. L'ensemble de ces courbes engendrent certaines surfaces que nous pouvons appeler surfaces asymptotiques et que nous nous proposons d'étudier.

Ces solutions asymptotiques peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(1)\qquad \begin{gathered} x_1 = \varphi_1(t, w), \qquad x_2 = \varphi_2(t, w), \qquad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t, w), \\ y_2 = n_2 t + \varphi_4(t, w), \end{gathered}$$

w étant égal à Ae^{at}, et A étant une constante arbitraire. De plus φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 sont (par rapport à t, w étant regardé un instant comme une constante) des fonctions périodiques de période T et $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de 2π.

Si entre les équations (1) on élimine t et w, il viendra:

$$(2)\qquad x_1 = f_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = f_2(y_1, y_2)$$

et ces équations peuvent être regardées comme définissant nos surfaces asymptotiques. Nous avons vu ensuite que si l'on cherche à développer φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on arrive à des séries qui sont divergentes, mais que ces séries représentent néanmoins asymptotiquement ces fonctions lorsque μ est très petit.

Je rappelle que je conviens de dire que la série

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots$$

représente asymptotiquement la fonction $F(x)$ pour x très petit, quand on a:

$$\lim \frac{F(x) - A_0 - A_1 x - \ldots - A_p x^p}{x^p} = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

J'ai étudié dans les Acta mathematica, tome 8, les propriétés des séries divergentes qui représentent asymptotiquement certaines fonctions et j'ai reconnu que les règles ordinaires du calcul sont applicables à ces séries. Une égalité asymptotique, c'est à dire une égalité entre une série divergente et une fonction qu'elle représente asymptotiquement, peut subir toutes les opérations ordinaires du calcul, à l'exception de la différentiation.

Soient donc

$$\sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), \; \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \; \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), \; \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu})$$

les séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ qui représentent asymptotiquement $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Nous aurons alors les quatre égalités asymptotiques:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \sigma_1(t, w, \sqrt{\mu}), & x_2 &= \sigma_2(t, w, \sqrt{\mu}), \\ y_1 &= n_1 t + \sigma_3(t, w, \sqrt{\mu}), & y_2 &= n_2 t + \sigma_4(t, w, \sqrt{\mu}). \end{aligned}$$

Nous pourrons éliminer t et w entre ces égalités d'après les règles ordinaires du calcul et nous obtiendrons ainsi deux nouvelles égalités asymptotiques:

$$(4) \qquad x_1 = s_1(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \qquad x_2 = s_2(y_1, y_2, \sqrt{\mu}),$$

où s_1 et s_2 sont des séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et dont les coefficients sont des fonctions de y_1 et de y_2.

En général, il n'est pas permis de différentier une égalité asymptotique; mais nous avons démontré directement à la fin du § 14 que dans le cas particulier qui nous occupe, on peut différentier autant de fois que l'on veut les égalités (3), tant par rapport à t que par rapport à w.

Nous pouvons en conclure qu'il est permis également de différentier les égalités (4) autant de fois qu'on veut par rapport à y_1 et à y_2.

Nous nous proposons d'étudier les surfaces asymptotiques définies

par les équations (2). Les fonctions $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$ qui entrent dans ces équations devront satisfaire aux équations

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons procéder par approximations successives; dans une première approximation nous prendrons pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4) en nous arrêtant au second terme des séries (c'est à dire au terme en $\sqrt{\mu}$) inclusivement. L'erreur commise sera alors du même ordre de grandeur que μ.

Dans une seconde approximation, nous prendrons encore pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4), mais en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries. Nous pourrons en prendre un assez grand nombre pour que l'erreur commise soit du même ordre de grandeur que μ^p, quelque grand que soit p.

Enfin dans une troisième approximation, nous chercherons à mettre en évidence les propriétés des équations *exactes* des surfaces asymptotiques, c'est à dire des équations (2).

Nous devons donc d'abord chercher à former directement les séries s_1 et s_2 des équations (4). Ces séries, substituées à la place de x_1 et de x_2, doivent satisfaire formellement aux équations (5).

Nous sommes donc conduits à chercher des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, qui satisfassent formellement aux équations (5). Les coefficients de ces séries seront des fonctions de y_1 et de y_2 qui ne devront pas changer quand y_1 et y_2 augmenteront respectivement de $n_1 T$ et $n_2 T$.

Mais nous trouverons une infinité de séries qui satisfont à ces conditions. Comment distinguer parmi celles-là, celles qui doivent entrer dans les égalités (4)? Nous avons vu plus haut que dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique considérée est représentée par une courbe fermée et que par cette courbe fermée, passent deux surfaces asymptotiques. On passe de l'une à l'autre en changeant $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Si donc dans les équations (2) on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, on obtient une seconde surface asymptotique qui doit couper la première.

En d'autres termes, si on considère les deux surfaces asymptotiques ainsi obtenues comme deux nappes d'une même surface, on peut dire que cette surface a une courbe double.

Soit s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2, les équations:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \\ x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

représenteront deux surfaces qui différeront peu des deux nappes dont je viens de parler et qui par conséquent devront se couper.

Si l'on considère ces deux surfaces comme deux nappes d'une surface unique, on peut dire que cette surface unique présente une courbe double.

Nous verrons dans la suite que cette condition suffit pour faire distinguer les séries s_1 et s_2 parmi toutes les séries de même forme qui satisfont formellement aux équations (5).

§ 17. *Première approximation.*

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2, deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2)\qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Que F dépend d'un paramètre très petit μ, de telle façon qu'on puisse développer F suivant les puissances de μ et écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 \dots .$$

Que F_0 ne dépend que de x_1 et x_2 et est indépendant de y_1 et de y_2.

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de x_1 et de x_2, par exemple pour:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0$$

les deux nombres:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(que j'appellerai pour abréger n_1 et n_2) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le § 11 à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0,$$

qui portait le n° 7 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (7) correspond une solution périodique des équations (1).

Nous avons vu ensuite dans le § 12 que le nombre des racines de l'équation (7) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

Les équations (1) *ont donc si μ est assez petit des solutions périodiques instables.*

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au § 13 que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable, passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2),$$

Φ_1 et Φ_2 étant deux fonctions de y_1 et de y_2 qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \\
(3) \qquad &\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.
\end{aligned}$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître x_2, en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de x_1, de y_1 et de y_2.

Voici comment nous procèderons pour intégrer les équations (3) en supposant que x_1 et x_2 sont très voisins de x_1^0 et de x_2^0, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que x_1 et x_2 sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad x_1 &= x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots, \\
x_2 &= x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,
\end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions x_i^k de telle façon qu'en substituant dans les équations (3) à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites formellement.[1]

[1] Si x_1^0 et x_2^0 étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable,

Si dans F nous substituons à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots.$$

On voit d'ailleurs sans peine que:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1x_1^1 - n_2x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

$$+\left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0} + (x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1x_1^2 - n_2x_2^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et plus généralement:

$$H_k = \theta_k - [Lx_1^1x_1^{k-1} + M(x_1^1x_2^{k-1} + x_2^1x_1^{k-1}) + Nx_2^1x_2^{k-1}] - n_1x_1^k - n_2x_2^k,$$

θ_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}, \qquad M = -\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0}, \qquad N = -\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déterminer successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k$.

Nous pouvons toujours supposer que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

---

on pourrait se contenter de développer x_1 et x_2 suivant les puissances de μ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. LINDSTEDT pourraient rendre des services dans certains cas.

a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction F qui est périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2, est encore périodique de période 2π par rapport à y_1'' et à y_2''. Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres n_1 et n_2 sont remplacés par deux nouveaux nombres n_1'' et n_2'' qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que n_1 et n_2 par rapport aux équations primitives et l'on a:

$$n_1'' = \quad dn_1 - cn_2,$$

$$n_2'' = -bn_1 + an_2.$$

Mais le rapport de n_1 à n_2 étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers a, b, c, d de telle sorte que

$$n_2'' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que n_2 soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre.

Nous supposerons en même temps $n_1 T = 2\pi$.

Si après cette simplification, nous égalons les coefficients de $\sqrt{\mu}$ dans les deux membres des deux équations (3) il viendra

$$-n_1 \frac{dx_1^1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx_2^1}{dy_1} = 0 \tag{5}$$

ce qui montre que x_1^1 et x_2^1 ne dépendent que de y_2.

Egalons maintenant les coefficients de μ dans les deux membres de la première des équations (3), il viendra, en tenant compte des équations (5):

$$-n_1 \frac{dx_1^2}{dy_1} - (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2} + \frac{dF_1}{dy_1} = 0. \tag{6}$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions x_i^k de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de y_1, qui ne doivent pas être altérées quand, y_2 conservant la même valeur, y_1 augmentera de 2π.

Nos fonctions pourront alors être développées en séries trigonométriques suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1. Nous conviendrons de représenter par la notation

$$[U]$$

le terme tout connu dans le développement de la fonction périodique U, suivant les lignes trigonométriques de y_1 et de ses multiples. Dans ces conditions on aura:

$$\left[\frac{dU}{dy_1}\right] = 0,$$

et je puis écrire

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}\right] = 0,$$

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2}\right] = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

Comme x_1^1 et x_2^1 ne dépendent pas de y_1, je puis écrire plus simplement:

$$\frac{dx_1^1}{dy_2} = 0, \qquad (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2} = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right]. \tag{7}$$

La première de ces équations montre que x_1^1 se réduit à une constante. Quant à la seconde, elle est facile à intégrer. On a en effet:

$$\left[\frac{dF_1}{dy_2}\right] = \frac{d[F_1]}{dy_2},$$

ce qui nous donne pour l'intégrale de l'équation (7)

$$Mx_1^1x_2^1 + \frac{N}{2}(x_2^1)^2 = [F_1] + C_1, \tag{8}$$

C_1 désignant une constante d'intégration.

Mais si nous regardons la constante des forces vives C comme une des données de la question, nous ne pouvons plus considérer les deux constantes x_1^1 et C_1 comme arbitraires. On doit avoir en effet identiquement

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots = C$$

ou

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \dots$$

ou:

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad -n_1 x_1^1 = 0, \quad \dots .$$

Ainsi la constante x_1^1 est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

L'équation (8) devient en effet

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposerons donc que x_1 et x_2 sont définis en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu}x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement, indépendante de y_1.

Revenons à notre premier exemple du § 15. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'} \ \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \ \xi \sin y_2',$$

où

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \qquad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x_2'}{x_1}.$$

$$y_1 = g - l, \qquad y_2 = l.$$

Nous avions observé de plus que les variables

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2 = x_1 - x_2$$

forment avec y'_1 et y'_2 un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ, y'_1 et y'_2 comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre ξ, y'_1, y'_2 est l'équation d'une surface.

Mais ensuite, nous avons dû faire un autre changement de variables. Nous avons posé:

$$x''_1 = ax_1 + dx_2, \qquad y''_1 = dy_1 - cy_2,$$
$$x''_2 = cx_1 + dx_2, \qquad y''_2 = -by_1 + ay_2,$$

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé n''_2.

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x''_1, x''_2, y''_1 et y''_2.

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui précède, et *auxquelles nous conserverons désormais ce nom,* ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du § 15, c'est à dire G, L, $g - t$ et l.

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de:

$$y'_1 = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{et de} \quad y'_2 = \frac{1}{2}(g - t - l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ.

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complètement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1, le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 de telle façon que toute relation entre y_1, y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

L'équation approximative de nos surfaces trajectoires, en négligeant les termes en μ sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}. \tag{9}$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (9).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{dy_1}{dt} \gtrless 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

il vient:

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu\frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2\frac{dF_2}{dx_1} + \ldots.$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. Q. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π.

Reprenons les surfaces définies par l'équation (9) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1].$$

Revenons aux notations du § 11. Dans ce paragraphe nous avons posé:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

A et h étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite:

$$y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2)t + m_2 \varpi_2 + h,$$

nous trouvions:

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega.$$

Je posais ensuite:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega,$$

la sommation indiquée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$\omega = m_2 \varpi_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et on a $y_2 = \varpi_2$; il vient donc:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin(m_2 \varpi_2 + h) = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de F_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc:

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h) = \psi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignions par ψ dans la 1ère partie.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

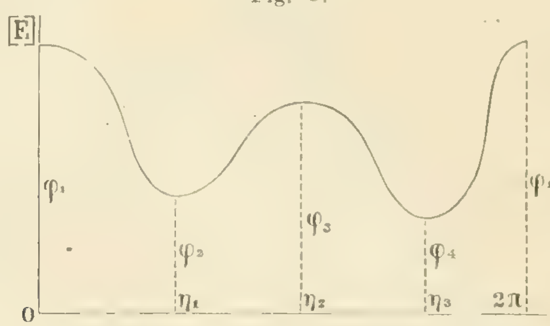
Nous supposerons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à 2π.

Pour $y_2 = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_1.
Pour $y_2 = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_2.
Pour $y_2 = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_3.
Pour $y_2 = \eta_3$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_4.
Pour $y_2 = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur φ_1.

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est y_2 et l'ordonnée $[F_1]$:

Fig. 6.



Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1, ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein ———— les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement:

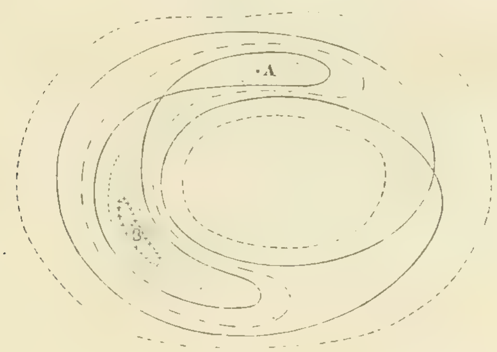
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3$$

et:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_1.$$

J'ai représenté par un trait pointillé ------- les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

Fig. 7.



J'ai représenté par le trait mixte _.._.._.._.. une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué .... les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait × × × × × ×.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste

seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduit à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_2}{r_1}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient tout entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est:

$$y_2 = \text{const.}; \qquad \frac{x_2}{r_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (9).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables:

$$C = -\varphi_1\,, \ -\varphi_2\,, \ -\varphi_3 \quad \text{et} \quad -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de Pascal à point double ou d'une lemniscate, autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 11 nous avons envisagé l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$$

qui portait le n° 7 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire:

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_4$ et deux solutions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_1$.

Quelles sont parmi ces surfaces, celles qui diffèrent peu des surfaces asymptotiques et les représentent en première approximation? D'après ce que nous avons vu au § 16, ce seront celles d'entre elles qui présentent une courbe double, c'est à dire les surfaces $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$.

§ 18. *Deuxième approximation.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent et les hypothèses faites au début de ce paragraphe; écrivons:

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$
$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots;$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de y_1 et de y_2 et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1) du paragraphe précédent, c'est à dire que l'on ait:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

C'est là le problème que nous nous sommes proposé plus haut.

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des *Vorlesungen über Dynamik*).

Si x_1 et x_2 sont deux fonctions de y_1 et de y_2 satisfaisant aux équations (1), l'expression:

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons:

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$

S sera une fonction de y_1 et de y_2 qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles:

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C. \tag{2}$$

S pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura:

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \dots \tag{3}$$

$S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ seront des fonctions de y_1 et de y_2 et on aura:

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \qquad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe précédent, aux fonctions x_1^k et x_2^k; nous avons supposé d'abord que x_1^0 et x_2^0 devaient être des constantes. On a alors

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Si nous appelons ensuite n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$, ces quantités n_1 et n_2 seront encore des constantes. L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que x_1^k et x_2^k sont des fonctions périodiques de y_1 qui ne changent pas de valeur quand on change y_1 et y_2 en $y_1 + 2\pi$ et y_2.

Il résulte de là que $\frac{dS_k}{dy_1}$ et $\frac{dS_k}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à y_1 et qu'on peut écrire:

$$S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k, \tag{4}$$

λ_k étant une constante et S'_k une fonction périodique de y_1.

Supposons que dans le premier membre de l'équation (2)

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

on remplace S par son développement (3); on verra que F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe précédent:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

les H étant des fonctions de y_1, de y_2, et des dérivées partielles de S_0, S_1, S_2, etc.

On voit d'ailleurs que H_0 dépendra seulement de S_0, H_1 de S_0 et S_1, H_2 de S_0, S_1 et S_2, H_3 de S_0, S_1, S_2, S_3 etc.

On trouve d'ailleurs:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0) = C,$$

$$H_1 = -n_1 \frac{dS_1}{dy_1},$$

$$H_2 = -n_1 \frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,$$

$$H_3 = -n_1 \frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_p = -n_1 \frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\Delta S_p = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} x_1^1 x_1^p + \frac{d^2F_0}{dx_1^0\, dx_2^0}(x_1^1 x_2^p + x_2^1 x_1^p) + \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2} x_2^1 x_2^p\right]$$

et où K_p ne dépend que de S_0, S_1, ..., jusqu'à S_{p-2}.

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions S_p, nous aurons les équations suivantes:

$$H_0 = C, \quad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \ldots, \quad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ fussent entièrement connues, l'équation

$$H_p = 0$$

ou

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p \tag{5}$$

déterminerait la fonction S_p à une fonction arbitraire près de y_2.

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement

$$S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}$$

et que l'on connaisse S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2.

Par hypothèse les dérivées de $S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}, S_{p-1}$ sont des fonctions périodiques de y_1; donc K_p et ΔS_{p-1} seront des fonctions périodiques de y_1.

Désignons par $[U]$ comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent la valeur moyenne de U qui est une fonction périodique de y_1.

S_p doit être de la forme (4); nous en concluons que:

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1}\right]$$

doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de y_2, de sorte que l'équation (5) nous donne:

$$2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p, \tag{6}$$

et cette équation déterminera complètement S_{p-1} (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante λ_p).

Nous trouvons d'abord l'équation:

$$H_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

qui nous montre que S_1 est une fonction arbitraire de y_2.

Nous en déduirons:

$$2\Delta S_p = -M\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_1} - N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_2}$$

(nous posons pour abréger:

$$-M = \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \qquad -N = \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité).

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à 0 la valeur moyenne de H_2 est la suivante:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_2}\right)^2 = [\Delta S_1].$$

D'autre part:

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

λ_2 est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

S_1 est ainsi entièrement déterminé à une constante près; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle puisque les fonctions S n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (6) devient ensuite:

$$(7) \qquad \left[N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\left[\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

Dans le second membre tout est connu; K_p ne dépend que de S_0, $S_1, \ldots, S_{p-2}$; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque S_{p-1} est supposée déterminée à une fonction arbitraire près de y_2.

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de y_1; le premier membre peut donc s'écrire:

$$N\frac{dS_1}{dy_1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right],$$

de sorte que l'équation (7) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ en fonction de y_2. Nous connaîtrons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de y_2; donc S_{p-1} est entièrement déterminé.

La constante C_1 joue un rôle prépondérant. Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\varphi_4$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif parce que je suis libre de prendre le signe $+$ devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes λ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de y_1, mais encore de y_2. (S_p est alors de la forme

$$S_p = \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S_p'',$$

λ_p et μ_p étant des constantes pendant que S_p'' est périodique de période 2π tant par rapport à y_1 que par rapport à y_2.)

En effet, supposons que cela soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les A et les α étant des constantes, m_1 et m_2 étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0.m_2} \cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2[\Delta S_{p-2}] + [K_{p-1}] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

λ_{p-1} étant une constante; on en conclut que:

$$A_{0.m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \neq 0, \qquad A_{0.0} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \sum A_{m_1.m_2} \frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

m_1 et m_2 prenant toujours sous le signe Σ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \neq 0$.

Ainsi, pour que S_{p-1} soit de la forme voulue, il suffit que:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

soit une fonction périodique de y_2. Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est défini par l'équation:

$$N \frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

K_p ne dépendant que de $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ sera périodique en y_2.

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une constante $\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}$; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_2 *qui ne s'annule jamais.*

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ peut être développé suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_2.

On a ensuite:

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p,$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en y_1 et y_2.

Ainsi en choisissant pour C_1 une valeur supérieure à $-\varphi_4$ et en choisissant ensuite les autres constantes $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_1 et de y_2. Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas.

Passons maintenant au cas de

$$C_1 = -\varphi_4,$$

qui ainsi que nous l'avons vu au § 17 est celui qui correspond aux séries qui représentent asymptotiquement les surfaces asymptotiques.

L'expression

$$[F_1] + C_1$$

n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de y_2 que nous avons appelée η_3 dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce paragraphe que cette valeur est nulle; j'ai le droit de le faire, puisque cela n'implique qu'un choix particulier de l'origine des y_2.

Ecrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique:

$$[F_1] + C_1 = \Sigma A_m \sin my_2 + \Sigma B_m \cos my_2.$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante:

$$\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$$

est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2; c'est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire:

$$\frac{\sin\frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1] + C_1}} = \Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2$$

et par conséquent:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2}.$$

Nous pourrons écrire maintenant l'équation (7) sous la forme suivante:

$$(7') \qquad \frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p + \Phi_p(y_2),$$

Φ_p étant une fonction connue de y_2.

Cela posé, je me propose de démontrer que:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

sont des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, dont la période est 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

Supposons en effet que cela soit démontré pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de y_2. Nous pourrons donc écrire:

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2).$$

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et y_2 et ζ_{p-1} une fonction arbitraire de y_2 seulement. Il vient ensuite:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2.

L'équation (7') montre que cela est vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante λ_p) et l'équation (5) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

quel que soit l'indice p.

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$. En effet ces fonctions ne sont pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes λ_p; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (7') d'où l'on doit tirer la valeur de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

a en facteur dans son premier membre $\sin\frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ contiendra $\sin\frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions S_p pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin\frac{y_2}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 2k\pi.$$

Si y_2 a une valeur différente de $2k\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de y_1; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1.

Nous pouvons donc écrire par exemple:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos my_1 + \Sigma B_m \sin my_1$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes λ_p *d'indice impair* soient toutes nulles; je dis que

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

ne changeront pas quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice p sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice p sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Si $\dfrac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \Sigma A_m \cos my_1 + \Sigma B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2.

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 augmente de 2π, il en sera de même de A_m et B_m et des dérivées de ces fonctions par rapport à y_2. Il en sera donc encore de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2}\frac{\sin my_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2}\frac{\cos my_1}{m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière K_p dépend des fonctions $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de K_p par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair

$$S_1, S_3, S_5, \ldots$$

sera de même parité que p.

En effet, en faisant dans

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right),$$

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \ldots,$$

nous avons trouvé:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \ldots.$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change S_1, S_3, S_5, etc. en $-S_1, -S_3, -S_5$ etc. sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de F ne devra pas changer.

Donc H_p devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de H_p par rapport aux dérivées de S_1, S_3, S_5, etc., devra être de même parité que p. Il devra

donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de K_p puisqu'on obtient K_p en supprimant dans H_p les termes qui dépendent de S_{p-1} ou de S_p.

Cela posé, changeons y_2 en $y_2 + 2\pi$; les dérivées de S_q ne changeront pas si q est pair et au plus égal à $p - 2$; elles changeront de signe si q est impair et au plus égal à $p - 2$. Donc K_p se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (7)

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{7}$$

Quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$,

$$[K_p] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p[K_p],$$

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right],$$

et

$$\frac{dS_1}{dy_2} \quad \text{se change en} \quad -\frac{dS_1}{dy_2}.$$

Nous pouvons même dire que

$$\lambda_p \quad \text{se change en} \quad (-1)^p\lambda_p.$$

En effet cela est vrai pour p pair parce que λ_p est une constante indépendante de y_2; cela est vrai encore pour p impair parce que nous avons supposé que les λ_p d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^{p-1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et par conséquent

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{en} \quad (-1)^{p-1}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que $\dfrac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p\dfrac{dS_p}{dy_1}$.

Ecrivons en effet l'équation (5)

$$(5) \qquad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p;$$

K_p et ΔS_{p-1} et par conséquent le second membre de l'équation (5) seront multipliés par $(-1)^p$ quand y_2 augmentera de 2π. Il devra donc en être de même du premier membre et de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes λ_p de façon que les dérivées des fonctions S_p ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2k\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes λ_q d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir λ_p de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que λ_p devra être nulle si p est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ reste finie, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et de

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right].$$

Reprenons maintenant l'équation (7'). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ s'annule pour $y_2 = 2k\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait:

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

Comme Φ_p ne change pas quand y_2 augmente de 4π, il suffira de prendre $k = 0$ et $k = 1$ et d'écrire

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p. \tag{8}$$

Si p est pair, il n'y a pas de difficulté, on a:

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre:

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Si au contraire p est impair, on a:

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et

$$\Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (8) ne peuvent être satisfaites que si l'on a:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour p impair, $\Phi_p(0)$ est nul.

Soit en effet:

$$\Phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Je dis que α est nul.

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident.

Voici l'énoncé de ce lemme:

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions périodiques et de période 2π par rapport à y_1 et à y_2. On sait que si φ est une fonction périodique de y_1, par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0$$

ou

$$\iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right) dy_1 dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de y_1 et de y_2 depuis 0 jusqu'à 2π.

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions φ_1 et φ_2 soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Ces dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous achèverons de déterminer la fonction S_{p-1} non plus par l'équation (7'), mais par l'équation suivante:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2} = -\alpha \cos \frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2).$$

Elle ne diffère de l'équation (7') que par ce que λ_p a été remplacé par $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est une fonction périodique de y_2 et de période 2π, (je rappelle que p est supposé impair). De plus cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2k\pi$, parce que le second membre de l'équation (9) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\zeta_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}} \eta,$$

$$\zeta_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

η sera une fonction de y_1, de y_2 et de μ définie par l'équation:

$$\text{(10)} \qquad F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il est aisé de voir que ζ_2 est entièrement déterminé puisque nous connaissons maintenant complètement $S_0, S_1 \ldots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer η de l'équation (10) sous la forme suivante:

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta_1 + \mu \eta_2 + \ldots,$$

les η_i étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, de période 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

De plus on aura:

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^{\frac{p}{2}} \frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de η_0; or on voit tout de suite que η_0 est donnée par l'équation suivante:

$$(11) \qquad n_1 \eta_0 = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

qui ne diffère de l'équation (5) que par ce que l'inconnue y est désignée par η_0.

Cette équation montre que η_0 est une fonction périodique de y_1; il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (9), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (11) est $\alpha \cos\frac{y_2}{2}$. On a donc:

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos\frac{y_2}{2}.$$

ζ_2 est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai φ_2 la plus grande des deux valeurs de ζ_2 et ψ_2 la plus petite.

De même ζ_1 est susceptible de deux valeurs; j'appellerai φ_1 celle qui correspond à φ_2 et ψ_1 celle qui correspond à ψ_2.

Enfin η est susceptible de deux valeurs; j'appellerai η' celle qui correspond à φ_2 et η'' celle qui correspond à ψ_2; η_i est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même η_i' et η_i''.

La fonction φ_2 est périodique de période 2π par rapport à y_2; en effet, quand on augmente y_2 de 2π, les deux valeurs de ζ_2 se permutent entre elles; donc φ_2 qui est toujours égale à la plus grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, $\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \eta', \eta'', \eta_i', \eta_i''$ seront des fonctions de période 2π par rapport à y_2.

Des définitions précédentes, il résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et ψ_2 sont des

fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que η' et η'' puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrons écrire:

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint\frac{d\eta'}{dy_2}dy_1dy_2=\iint\left(\frac{d\varphi_1}{dy_2}-\frac{d\varphi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2=0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint\frac{d\eta''}{dy_2}dy_1dy_2=\iint\left(\frac{d\psi_1}{dy_2}-\frac{d\psi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2=0,$$

ou encore

$$\iint\frac{d(\eta'-\eta'')}{dy_2}dy_1dy_2=0,$$

ou enfin:

$$\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2+\iint\left[\frac{d(\eta'-\eta_0')}{dy_2}-\frac{d(\eta''-\eta_0'')}{dy_2}\right]dy_1dy_2=0.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit μ.

Mais quand μ tend vers 0 $\eta'-\eta_0'$ et $\eta''-\eta_0''$ tendent vers 0.

Donc on aura:

$$\lim\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2=0\quad(\text{pour } \mu=0). \tag{12}$$

Transformons le premier membre de l'égalité (12). Je remarque d'abord que p étant impair, η_0 est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand y_2 se change en $y_2+2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à l'équation (11). Nous avons donc:

$$\eta_0'=-\eta_0''=\pm\eta_0,$$

d'où

$$\iint\frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}dy_1dy_2=2\iint\frac{d\eta_0'}{dy_2}dy_1dy_2=2\iint\frac{d(\pm\eta_0)}{dy_2}dy_1dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta_0'=+\eta_0$ et pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta_0'=-\eta_0$.

Si nous avons:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \mu^2\frac{dS_5}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}}\frac{dS_{p-2}}{dy_2} > 0, \tag{13}$$

nous devrons prendre d'après notre convention:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} + \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} - \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (13) est négatif, nous devrons prendre:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'inégalité (13). Egalons ce premier membre à 0, nous obtiendrons une équation:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots = 0. \tag{14}$$

Cette équation peut être regardée comme définissant y_2 en fonction de y_1 et de μ.

On pourra résoudre cette équation et écrire:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que θ est une fonction périodique de période 2π par rapport à y_1 et que cette fonction θ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand y_2 variera de θ à $\theta + 2\pi$, on aura:

$$\eta_0' = +\eta_0$$

et quand y_2 variera de $\theta + 2\pi$ à $\theta + 4\pi$, on aura

$$\eta_0' = -\eta_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de y_2 comprises entre 0 et 2π. Mais comme η_0' est une fonction de période 2π, on aura:

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2}.$$

Quand μ tendra vers 0, le premier membre devra tendre vers 0 et d'ailleurs θ tendra vers 0, on aura donc:

$$\lim \iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2} = 0$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\eta_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\eta_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi \frac{\alpha}{n_1} \int_0^{2\pi} \sin\frac{y_2}{2} dy_2 = -\frac{4\pi\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\alpha = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que si l'on annule les constantes λ_p d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes λ_p d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples pairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls dans le développement si p est pair; si au contraire p est impair, les multiples impairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls.

Nous aurons alors pour les équations approximatives de la surface asymptotique

$$(15)\qquad x_1 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \qquad x_2 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}.$$

Ces séries ainsi que nous l'avons vu sont divergentes, mais si on arrête comme nous le faisons dans les équations (15) au n^e terme, l'erreur commise peut être très petite si μ est très petit, ainsi que je l'ai exposé plus haut.

Nous avons vu que la quantité appelée plus haut α est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Posons:

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots.$$

Je dis d'abord que T est une fonction périodique de y_1 et de y_2.

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques; on a donc:

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

β et γ étant des constantes et T' étant une fonction périodique de y_1 et y_2.

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \qquad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

$\frac{dT'}{dy_1}$ et $\frac{dT'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_3, \ldots, S_{p-2}$ étant d'indice impair, leurs dérivées changent de signe quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand y_2 augmente de 2π. Donc les termes tout connus β et γ sont nuls. Donc $T = T'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand y_1 augmente de 2π et qui change de signe quand y_2 augmente de 2π.

Cela posé, nous savons que ζ_1 et ζ_2 sont liés par l'équation:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de ζ_2 se confondent, les deux valeurs de ζ_1 se confondent également.

Ecrivons que les deux valeurs de ζ_2 se confondent, il vient:

$$\frac{dT}{dy_2} = 0. \tag{16}$$

Cette équation (16) est d'ailleurs identique à l'équation (14). Ecrivons maintenant que les deux valeurs de ζ_1 se confondent, il viendra:

$$\frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0. \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

θ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe θ suivant les puissances croissantes de μ, il viendra:

$$y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \ldots, \tag{18}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ étant des fonctions périodiques de y_1.

Supposons y_2 lié à y_1 par l'équation (18); quand y_1 augmentera de 2π, y_2 ne changera pas et T qui est périodique ne changera pas non plus; on aura donc:

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2\right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (16) et (17)

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{2\pi} \xi dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots$$

on remplace y_2 par sa valeur (18) il viendra:

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots,$$

ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. étant des fonctions périodiques de y_1.

On devra avoir quel que soit μ:

$$\int_0^{2\pi} dy_1(\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots) = 0$$

et par conséquent:

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 dy_1 = 2\pi[\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir ξ_0, il suffit de faire $y_2 = 0$ dans η_0, or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1}\cos\frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0$$

ou

$$\alpha = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 19. *Troisième approximation.*

Nous nous proposons maintenant de construire exactement nos surfaces asymptotiques ou plutôt leur intersection avec la surface $y_1 = 0$ qui est comme nous l'avons vu plus haut une surface sans contact.

Dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique que nous envisageons est représentée par une certaine courbe trajectoire fermée. Cette courbe fermée vient couper la surface $y_1 = 0$ en un point que j'ai représenté sur la figure en O'.

Par cette courbe fermée passent deux surfaces asymptotiques; ces deux surfaces coupent la surface $y_1 = 0$ suivant deux courbes que j'ai représentées sur la figure en trait plein en $AO'B'$ et $A'O'B$.

J'ai représenté en trait pointillé ------- la courbe $y_1 = y_2 = 0$.

Reprenons les notations du § 16; considérons les séries s_1 et s_2 qui entrent dans les équations (4) de ce paragraphe; soient comme dans le

§ 16, s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2. Nous avons vu que les équations:

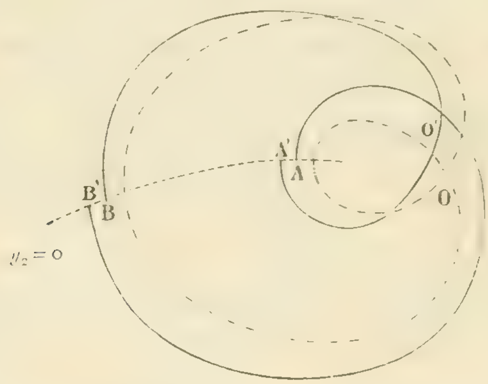
$$x_1 = s_1^p(y_1\,,\,y_2), \qquad x_2 = s_2^p(y_1\,,\,y_2)$$

représentent des surfaces qui diffèrent très peu des surfaces asymptotiques. Ces surfaces couperont la surface $y_1 = 0$ suivant des courbes qui ont pour équation:

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0\,,\,y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0\,,\,y_2)$$

et qui sont représentées sur la figure en trait mixte —..—..— ..—..

Fig. 9.



Nous avons appris dans le paragraphe précédent à former les séries s_1 et s_2; nous avons vu que $s_1^p(y_1\,,\,y_2)$ et $s_2^p(y_1\,,\,y_2)$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à y_1 et de période 4π par rapport à y_2.

Il en résulte que la courbe en trait mixte doit être comme l'indique la figure une courbe fermée admettant un point double O.

La première question à traiter est la suivante: les courbes en trait plein, intersections des surfaces asymptotiques avec $y_1 = 0$, sont-elles aussi des courbes fermées? Il est clair qu'il en serait ainsi si les séries s_1 et s_2 étaient convergentes. Car les courbes en trait pointillé différeraient alors aussi peu qu'on voudrait des courbes en trait plein; la distance d'un point de la courbe pleine à la courbe pointillée tendrait vers 0 quand p croîtrait indéfiniment.

Je vais montrer sur un exemple simple qu'il n'en est pas ainsi. Soit:

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2\frac{y}{2} - \mu\varepsilon \cos x\varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ représente une fonction périodique de y de période 2π, et où μ et ε sont deux constantes que je suppose très petites. Je forme les équations:

$$(1)\quad \begin{gathered} \frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = 2q, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx} = -\mu\varepsilon \sin x\varphi(y), \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = \mu \sin y + \mu\varepsilon \cos x\varphi'(y). \end{gathered}$$

On voit que p et q joueront le même rôle que j'attribuais jusqu'ici à x_1 et à x_2, pendant que x et y joueront le rôle que j'attribuais à y_1 et à y_2, je n'ai changé les notations que pour supprimer les indices.

Supposons d'abord $\varepsilon = 0$. Les équations admettent alors une solution périodique qui s'écrit:

$$x = t, \qquad p = 0, \qquad q = 0, \qquad y = 0.$$

Les exposants caractéristiques (en laissant de côté les deux qui sont nuls, ainsi qu'il arrive toujours avec les équations de la dynamique) sont égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$.

Il existe alors deux surfaces asymptotiques qui ont pour équations:

$$p = \frac{dS_0}{dx}, \qquad q = \frac{dS_0}{dy}, \qquad S_0 = \mp 2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}$$

d'où

$$p = 0, \qquad q = \pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}.$$

Les exposants caractéristiques n'étant pas nuls, mais égaux à $\pm\sqrt{2\mu}$ quand on fait $\varepsilon = 0$, il existera encore une solution périodique pour les petites valeurs de ε; à cette solution périodique correspondront deux surfaces asymptotiques dont l'équation pourra se mettre sous la forme

$$p = \frac{dS}{dx}, \qquad q = \frac{dS}{dy},$$

S étant une fonction de x et de y satisfaisant à l'équation

$$\frac{dS}{dx} + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = 2\mu \sin^2\frac{y}{2} + \mu\varepsilon \cos x\varphi(y).$$

Les exposants caractéristiques ne s'annulant pas pour $\varepsilon = 0$, il résulte de ce que nous avons dit à la fin du § 13 que p et q et par conséquent S sont développables suivant les puissances croissantes de ε. Posons donc:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots.$$

Nous avons trouvé plus haut:

$$S_0 = -2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}.$$

Quant à S_1, il devra satisfaire à l'équation:

$$\frac{dS_1}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{dS_1}{dy} = \mu\cos x\varphi(y).$$

Si l'on désigne par Σ une fonction qui satisfasse à l'équation:

$$\frac{d\Sigma}{dx} + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\Sigma}{dy} = \mu e^{ix}\varphi(y) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

S_1 sera la partie réelle de Σ. Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\Sigma = e^{ix}\psi(y);$$

il suffit pour cela que:

$$i\psi + \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi(y).$$

L'équation en ψ ainsi obtenue et qu'il s'agit d'intégrer est linéaire. Son intégrale générale s'écrit: si $\varphi(y) = 0$

$$\psi = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha = -i\sqrt{\frac{2}{\mu}}$$

et si $\varphi(y)$ est quelconque:

$$\psi = \left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}\int\sqrt{\frac{\mu}{2}}\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha}dy.$$

Comme ψ doit être développable suivant les puissances entières de y pour les petites valeurs de y, il est facile de voir quelle valeur il faudra donner à la constante d'intégration. Si, pour $y = 0$, $\varphi(y)$ s'annule, l'intégrale devra s'annuler aussi, de sorte qu'il faudra la prendre entre les limites 0 et y.

Que faudrait-il maintenant pour que les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ fussent fermées? Il faudrait que la fonction S restât finie ainsi que ses dérivées pour toutes les valeurs de y et fût périodique de période 4π par rapport à y (c'est ce qui arrivait, rappelons-le, pour les fonctions s_1^p et s_2^p dont nous avons parlé un peu plus haut). Comme cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de ε, cela devrait avoir lieu de S_1, et comme S_1 est égal à $\cos x$ multiplié par la partie réelle de ψ, plus $\sin x$ multiplié par la partie imaginaire de ψ, cela devrait avoir lieu de ψ.

Donc pour les valeurs de y voisines de 2π, ψ devrait être développable suivant les puissances entières de $y - 2\pi$. Mais il n'en est pas ainsi de $\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^\alpha$. Donc l'intégrale:

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, \varphi(y) \left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1} \left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha} dy$$

devrait être nulle. Calculons cette intégrale en supposant $\varphi(y) = \sin y$. Posons $\operatorname{tg}\frac{y}{4} = t$, il viendra:

$$J = 4\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}(1 - t^2)\, dt}{(1 + t^2)^2}.$$

Intégrons pas parties en remarquant que $\frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}$ est la dérivée de $\frac{t}{1 + t^2}$, il viendra:

$$J = 4\alpha\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}\, dt}{1 + t^2}.$$

Faisons $t^2 = u$, on aura:

$$J = 2\alpha\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{\alpha+1}{2}}\, du}{1 + u} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{2\mu}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{-8\pi i}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}}.$$

Donc J n'est pas nul; donc les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ ne sont pas fermées; donc les séries s_1 et s_2 ne sont pas convergentes, non plus que

les séries définies dans les §§ 14 et 18 ainsi que je l'avais annoncé dans ces paragraphes.

La distance des deux points B et B' n'est donc pas nulle, mais elle jouit de la propriété suivante. Non seulement BB' tend vers o, quand μ tend vers o, mais le rapport $\frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}}$ tend également vers o quelque grand que soit p.

En effet la courbe pointillée a pour équation

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p(0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et la courbe en trait plein a pour équation:

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = f_1(0, y_2), \qquad x_2 = f_2(0, y_2).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les fonctions f_1 et f_2, ce qui veut dire que l'on a:

$$\lim \frac{f_1 - s_1^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = \lim \frac{f_2 - s_2^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0).$$

Donc le rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B à la courbe pointillée tendra vers o et il en sera de même du rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B' à cette courbe pointillée. On a donc:

$$\lim \frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0.$$

C. Q. F. D.

En d'autres termes, si on regarde μ comme un infiniment petit du premier ordre, la distance BB', sans être nulle, est un infiniment petit d'ordre infini. C'est ainsi que la fonction $e^{-\frac{1}{\mu}}$ est un infiniment petit d'ordre infini sans être nulle.

Dans l'exemple particulier que nous avons traité plus haut, la distance BB' est du même ordre de grandeur que l'intégrale J, c'est à dire que $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}$.

Une seconde question à traiter est celle de savoir si les deux courbes $O'B$ et $O'B'$ prolongées se coupent. S'il en est ainsi en effet, la trajectoire qui passera par le point d'intersection appartiendra à la fois aux deux nappes de la surface asymptotique. Ce sera une trajectoire *doublement asymptotique*. Soit C la trajectoire fermée qui passe par le point O' et qui représente la solution périodique. La trajectoire doublement asymptotique diffère très peu de C, lorsque t est négatif et très grand, elle s'en éloigne asymptotiquement, s'en écarte beaucoup d'abord, puis s'en rapproche de nouveau asymptotiquement, de façon à différer très peu de C, lorsque t est positif et très grand.

Je me propose d'établir qu'il existe une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

Je commence par observer que la courbe $O'B$, quelque loin qu'on la prolonge, ne pourra jamais se recouper elle-même, c'est à dire que cette courbe $O'B$ prolongée n'a pas de point double. En effet d'après la définition de cette courbe les antécédents des divers points de $O'B$ sont eux-mêmes sur cette courbe $O'B$; de sorte que l'antécédente de la courbe $O'B$ est une portion de cette courbe. De même la seconde, la troisième etc., la n^e antécédente de $O'B$ sont des portions de plus en plus petites de cette courbe, limitées par le point O' d'une part et un point D de plus en plus rapproché de O' d'autre part.

Si la courbe $O'B$ avait un point double, il en devrait être de même de toutes ses antécédentes, et par conséquent de tout arc $O'D$ si petit qu'il soit, faisant partie de $O'B$. Or les principes du § 13 nous permettent de construire la portion de $O'B$ voisine de O' et de constater que cette portion de courbe n'a pas de point double. Il en est donc de même de la courbe entière quelque loin qu'on la prolonge.

D'après la définition des deux nappes de la surface asymptotique et des courbes $BO'A'$, $B'O'A$, l'une de ces courbes (par exemple la courbe $BO'A'$) est telle que le n^e antécédent d'un point de cette courbe se rapproche indéfiniment de O', quand n augmente; pour l'autre courbe $B'O'A$, c'est le n^e conséquent qui se rapproche indéfiniment de O'. Ce que nous venons de dire s'applique donc également à la courbe $O'B'$, pourvu qu'on remplace partout le mot antécédent par le mot conséquent. Donc la courbe $O'B'$ quelque loin qu'on la prolonge ne se recoupera pas elle-même et il est clair qu'il en sera de même des courbes $O'A$ et $O'A'$.

Je dis maintenant que la courbure des courbes $O'B$ et $O'B'$ est finie, je veux dire qu'elle ne croît pas indéfiniment quand μ tend vers o.

En effet nous avons vu que non seulement les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les deux fonctions f_1 et f_2, mais que les séries $\frac{d^2s_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2s_2}{dy_2^2}$ représentent asymptotiquement $\frac{d^2f_1}{dy_2^2}$ et $\frac{d^2f_2}{dy_2^2}$.

On en conclut que si μ est regardé comme un infiniment petit, la courbure de la courbe en trait plein au point B différera infiniment peu de la courbure de la courbe pointillée au point le plus rapproché; or cette dernière courbure est finie, donc il en est de même de la courbure de la courbe en trait plein.

Soit maintenant B_1 le conséquent du point B et B'_1 celui du point B'. La distance BB_1 est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$ et il en est de même de la distance $B'B'_1$, les arcs BB_1 et $B'B'_1$ sont donc très petits si μ est très petit et leur courbure est finie; d'autre part les distances BB', $B_1B'_1$ de même que les rapports $\frac{BB'}{BB_1}$, $\frac{BB'}{B'B'_1}$ tendent vers o quand μ tend vers o; enfin il existe un invariant intégral positif.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du théorème III du § 8. Nous en conclurons que les arcs BB_1 et $B'B'_1$ se coupent, c'est à dire que la courbe $O'B'$ coupe la courbe $O'B$ prolongée et par conséquent qu'il existe au moins une trajectoire doublement asymptotique.

Je dis maintenant qu'il en existe au moins deux.

En effet la figure a été construite de façon que les points B et B' soient sur la courbe

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Mais l'origine des y_2 est restée arbitraire; je puis supposer qu'on la choisisse de telle sorte qu'au point d'intersection des deux courbes $O'B$ et $O'B'$, on ait $y_2 = 0$. En ce cas les points B et B' coïncident. Il doit donc en être de même de leurs conséquents B_1 et B'_1. Les deux arcs BB_1 et $B'B'_1$ ont alors mêmes extrémités, mais cela ne suffit pas pour satisfaire au théorème III que je viens d'appliquer (il faut en effet pour satisfaire à ce théorème que l'aire limitée par ces deux arcs ne soit pas convexe), il faut encore qu'ils se coupent en un autre point N.

Par ce point passera une trajectoire doublement asymptotique qui

ne se confondra pas avec celle qui passe en B. Il y a donc au moins deux trajectoires doublement asymptotiques.

Je suppose toujours que les points B et B' se confondent. Soit BMN la portion de la courbe $O'B$ comprise entre les points B et N; soit de même BPN la portion de la courbe $O'B'$ comprise entre le point $B = B'$ et le point N. Ces deux arcs BMN et BPN limiteront une certaine aire que j'appelle α.

Nous avons vu que dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous occupe on peut appliquer le théorème 1[er] du § 8. Il existera donc des trajectoires qui traverseront une infinité de fois l'aire α.

Donc parmi les conséquentes de l'aire α, il y en aura une infinité qui auront une partie commune avec α.

Si donc on considère la courbe fermée $BMNPB$ qui limite l'aire α, et les conséquentes de cette courbe, il y aura une infinité de ces conséquentes qui couperont la courbe $BMNPB$ elle-même.

Comment cela peut-il se faire?

L'arc BMN ne peut couper aucun de ses conséquents; car l'arc BMN et ses conséquents appartiennent à la courbe $O'B$ et la courbe $O'B$ ne peut se recouper elle-même.

Pour la même raison l'arc BPN ne peut couper aucun de ses conséquents.

Il faut donc, ou bien que l'arc BMN coupe un des conséquents de BPN, ou que l'arc BPN coupe un des conséquents de BMN (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est le second cas qui se présentera). Dans l'un comme dans l'autre cas la courbe $O'B$ ou son prolongement coupera la courbe $O'B'$ ou son prolongement.

Ces deux courbes se coupent donc en une infinité de points et une infinité de ces points d'intersection se trouveront sur les arcs BMN ou BPN. Par ces points d'intersection passeront une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

On démontrerait de la même manière que la surface asymptotique qui coupe la surface $y_1 = 0$ suivant la courbe $O'A$ contient une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

CHAPITRE III.

Résultats divers.

§ 20. *Solutions périodiques du 2^e genre.*

Dans le chapitre précédent et en particulier dans les §§ 17 et 18 nous avons construit nos séries en supposant que l'on donne à C_1 une valeur tantôt supérieure tantôt égale à $-\varphi_4$.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\varphi_4$. Alors

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1, x_2^1 reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6. Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6:

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7.

J'observe d'abord que x_2^1 est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical; donnons d'abord par exemple à ce radical le signe $+$.

Imaginons que l'on ait calculé successivement

$$x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{k-2},$$

$$x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{k-2}.$$

L'équation (7) du § 18 nous donne:

$$x_1^2[x_2^{k-1}] = \theta(y_2) + C_{k-1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_5) + C_{k-1} = 0.$$

Alors bien que x_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_5$, la fonction

$$[x_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_5)}{x_2^1}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_5$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^k pour $\eta_5 < y_2 < \eta_7$ et nous appellerons $x_{0.i}^k$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe —. On trouvera pour les fonctions x_i^k de nouvelles valeurs que j'appelle $x_{1.i}^k$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C_1' très voisine de C_1.

Alors le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6.

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^k pour les valeurs de y_2 comprises entre η_7 et η_8, d'abord en faisant:

$$x_2^1 = +\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{2.i}^k$ les fonctions ainsi calculées), puis en faisant

$$x_2^1 = -\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{3.i}^k$ les fonctions ainsi calculées).

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes:

1°. $\quad y_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_{0.1}(y_2), \qquad x_2 = \varphi_{0.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_5$ à $y_2 = \eta_7$.

2°. $y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{1.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{1.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

3°. $y_2 = 0, \quad x_1 = \varphi_{2.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{2.2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

4°. $y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{3.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{3.2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

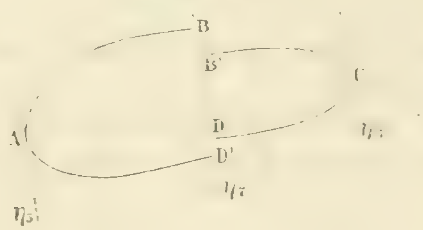
Dans ces formules nous avons posé:

$$\varphi_{p.q}(y_2) = x^0_{p.q} + x^1_{p.q}\sqrt{\mu} + \ldots + x^k_{p.q}\mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la seconde de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_5$.

La troisième et la quatrième courbes se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.

Fig. 8.



C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois arcs pointillés représentent les trois courbes

$$y_2 = \eta_5, \eta_7, \eta_8,$$

où l'arc AB représente la 1ère de nos quatre branches de courbe, l'arc AD' la seconde, l'arc $B'C$ la 3me et l'arc DC la quatrième.

Nous regarderons C_1 comme une donnée, mais C'_1 est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C''_1 par la condition que la 1ère et la 3me courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions:

(1) $$\varphi_{0.1}(\eta_7) = \varphi_{2.1}(\eta_7), \quad \varphi_{0.2}(\eta_7) = \varphi_{2.2}(\eta_7).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant sur le théorème III du § 8 nous pourrions démontrer que si C_1'' est déterminé par les équations (1), les équations

$$(1') \qquad \varphi_{1.1}(\eta_7) = \varphi_{3.1}(\eta_7), \qquad \varphi_{1.2}(\eta_7) = \varphi_{3.2}(\eta_7)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est à dire que la 2$^{\text{de}}$ et la 4$^{\text{me}}$ courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Il existe donc des régions, où, au moins pendant un certain temps, y_2 (dans le cas où l'on suppose $n_2 = 0$) ou $n_2 y_1 - n_1 y_2$ (dans le cas général) conservent des valeurs finies. C'est ce fait que les astronomes expriment d'ordinaire en disant qu'il y a libration. On peut se demander si ces régions de libration sont sillonnées de solutions périodiques.

On peut s'en rendre compte par les considérations suivantes.

Ecrivons les équations:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^2, \\ x_2 &= x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2. \end{aligned}$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir figure 8); elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du § 17. Quant à u_2^2 c'est une fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^2 que par une fonction de y_2 de telle sorte que

$$\frac{du_2^2}{dy_1} = \frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Cette fonction u_2^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que ces équations (2) satisfassent *exactement* aux équations (3) du § 17.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_2}, \\
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_2}
\end{aligned}
$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (2).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^*.

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0\,,\,x_2^0) = C, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut tirer de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonctions de C. Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C.

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2, de x_1^0 et de x_2^0, ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de y_2 et de C.

Les équations (2) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonctions de y_1, de y_2, de C et de C_1.

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que:

$$\frac{dx_1^2}{dy_2} = \frac{du_2^2}{dy_1}.$$

Résolvons maintenant les équations (2) par rapport à C et C_1, il viendra

$$
\begin{aligned}
C &= F^*(x_1\,,\,x_2\,,\,y_1\,,\,y_2), \\
C_1 &= \Phi^*(x_1\,,\,x_2\,,\,y_1\,,\,y_2).
\end{aligned}
$$

La fonction F^* est ainsi définie et on aura en employant la notation de Jacobi:

$$[F^*,\ \Phi^*] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\Phi^* = \text{const},$$

est une intégrale des équations (3).

La solution la plus générale de ces équations (3) s'écrit alors:

$$(\alpha) \qquad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \qquad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \qquad \frac{dS}{dC} = C' + t, \qquad \frac{dS}{dC_1} = C'_1,$$

C' et C'_1 étant deux nouvelles constantes d'intégration.

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence:

$$F - F^*.$$

Or x_1^2 est défini par la condition suivante:

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) - C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\ }$. (Cf. § 17.)

Donc comme $\frac{dF_0}{dx_2^0}$ est nul, la fonction

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) - C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction u_2^2.

D'ailleurs on a identiquement:

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) = C.$$

Donc la différence

$$F - F^*$$

regardée comme fonction de μ, de C, de C_1, de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant:

$$\xi_2 \sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonctions de x_1, ξ_2, y_1, y_2 et μ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2.

Nous venons de voir que $F - F^*$ est une fonction de μ, de y_1, de y_2, de C et de C_1 dont le développement suivant les puissances de μ commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonctions de μ, de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2, nous verrons que cette différence $F - F^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ, dont les coefficients dépendent de x_1, ξ_2, y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction:

$$\frac{F - F^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire les équations (3) deviennent:

$$(3') \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF^*}{\sqrt{\mu}dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}d\xi_2}. \end{aligned}$$

De même les équations proposées:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

doivent se réduire à:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF}{\sqrt{\mu}dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{\sqrt{\mu}d\xi_2}. \end{aligned}$$

Nous formerons en outre les équations suivantes:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d}{dy_1}(F^* + \varepsilon F'), & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{d}{dx_1}(F^* + \varepsilon F'), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{d}{\sqrt{\mu}dy_2}(F^* + \varepsilon F'), & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{d}{\sqrt{\mu}d\xi_2}(F^* + \varepsilon F'). \end{aligned}$$

qui se réduisent à (3') pour $\varepsilon = 0$ et à (4) pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (3) et par conséquent les équations (3') peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (α) la solution générale.

Si l'on discute cette solution générale et si on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1) + \mu u_2^2}}{x_1^0 + \mu x_1^2} \tag{6}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le § 17 et dont l'équation s'écrivait:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}}{x_1^0}. \tag{7}$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation (7). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le § 17 au sujet des maxima et des minima de $[F_1]$, deux de nos surfaces (6) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ de la constante C_1. Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (3') une surface asymptotique et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libration et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (α) qui nous font connaître la solution générale des équations (3) et (3'). D'après la forme des équations (2), nous pouvons écrire:

$$S = ay_1 + by_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{2\mu}{N}}\int\sqrt{([F_1] + C_1)}\,dy_2,$$

a et b étant des fonctions de C et de C_1 seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2.

On en déduit:

$$C_1' = \frac{dS}{dC_1} = \frac{da}{dC_1} y_1 + \frac{db}{dC_1} y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}} \int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_4$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2.

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que le tore, nous pouvons en faire le tour de deux manières différentes: 1° en regardant y_2 comme constant; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de

$$2\pi \frac{da}{dC_1}.$$

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale

$$\int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}$$

aura augmenté d'une certaine période v définie comme il suit:

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $\sqrt{([F_1] + C_1)}$ est réel soient les valeurs comprises entre η_5 et η_6, on aura:

$$v = 2 \int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Quand notre intégrale augmentera de v, $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de

$$v \sqrt{\frac{\mu}{2N}}.$$

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités:

$$2\pi\frac{da}{dC_1} \quad \text{et} \quad v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de C_1; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation:

$$2\pi\frac{da}{dC_1} = Kv\sqrt{\frac{\mu}{2N}} \tag{8}$$

(qui contient C_1 parce que $\frac{da}{dC_1}$ et v sont des fonctions de C_1) nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que:

$$a = x_1^0 + \mu[x_1^2]$$

et que:

$$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1) + \mu F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut:

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2}(x_2^1)^2 + F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1[x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

et:

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1, de sorte que l'équation (8) peut s'écrire

$$(8') \qquad \frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const.}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf. figure 7.)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (8′) comme définissant C_1 en fonction de μ, C_1 sera fonction continue de μ, mais nous pourrons prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ, toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (5) admettent pour $\varepsilon = 0$ une infinité de solutions périodiques; les principes du chapitre III (1ère partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε. Comme μ est très petit, il semble très probable qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est à dire pour les équations (4) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous

voyons que dans la *région de libration* R_2 *il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques.* Nous allons d'ailleurs l'établir rigoureusement par une voie toute différente.

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et *disparaître* ensuite pour une certaine valeur de μ. Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le chapitre III (1ère partie) et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées,[1] mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

Ainsi que je viens de le dire, l'aperçu qui précède ne suffirait pas pour établir rigoureusement l'existence des solutions périodiques du 2e genre. Voici comment nous y parviendrons.

Reprenons nos équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

et envisageons une solution périodique du 1er genre de période T; quand t augmentera de T, y_1 et y_2 augmenteront de $n_1 T$ et de $n_2 T$; je supposerai comme plus haut:

$$n_1 T = 2\pi, \qquad n_2 = 0.$$

Cela posé, de l'équation

$$F = C$$

nous pouvons tirer x_2 en fonction de x_1, y_1 et y_2; en remplaçant x_2 par la valeur ainsi obtenue, on trouve:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2},$$

[1] Les travaux récents de M. Cantor nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu.

les seconds membres pouvant être regardés comme des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2. Enfin en éliminant dt il viendra:

$$\frac{dx_1}{dy_1} = X, \qquad \frac{dy_2}{dy_1} = Y, \tag{9}$$

X et Y étant des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2, périodiques de période 2π par rapport à y_1.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad y_2 = \varphi_2(y_1)$$

la solution périodique considérée qui sera de période 2π par rapport à y_1; je suppose que cette solution périodique soit celle que nous avons définie plus haut et qui était représentée approximativement sur la figure du § 17 par la courbe fermée isolée de la surface $C_1 = -\varphi_3$. Ce sera donc une solution périodique *stable,* elle admettra deux exposants caractéristiques α et $-\alpha$ égaux et de signe contraire et dont le carré sera réel négatif.

Soit maintenant

$$x_1 = \varphi_1(y_1) + \xi_1, \qquad y_2 = \varphi_2(y_1) + \xi_2$$

une solution peu différente de la première. Soient conformément aux notations du chapitre III (1ère partie) β_1 et β_2 les valeurs initiales de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 0$, et $\beta_1 + \psi_1$, $\beta_2 + \psi_2$ les valeurs de ξ_1 et de ξ_2 pour $y_1 = 2k\pi$ (k entier). La solution sera périodique de période $2k\pi$ si l'on a:

$$\psi_1 = \psi_2 = 0. \tag{10}$$

On sait que ψ_1 et ψ_2 pourront se développer suivant les puissances de β_1 et β_2 et que ces fonctions dépendront en outre de μ.

Si on regarde un instant β_1, β_2 et μ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, les équations (10) représentent une certaine courbe gauche et à chaque point de cette courbe gauche correspond une solution périodique. Il est clair que ψ_1 et ψ_2 s'annulent avec β_1 et β_2; en effet si l'on fait $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, on obtient, d'après la définition de ξ_1 et de ξ_2, une solution périodique de période 2π qui peut aussi être regardée comme périodique de période $2k\pi$.

La courbe (10) comprend donc d'abord l'axe des μ tout entier. Je

me propose de démontrer que si, pour $\mu = \mu_0$, $k\alpha$ est multiple de $2i\pi$, il existera une autre branche de la courbe (10) qui passera par le point

$$\mu = \mu_0, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0$$

et par conséquent que pour les valeurs de μ voisines de μ_0, il existe d'autres solutions périodiques que $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Posons $\mu - \mu_0 = \lambda$ et cherchons à développer ψ_1 et ψ_2 suivant les puissances de β_1, de β_2 et de λ.

Calculons d'abord les termes du 1[er] degré par rapport à β_1 et à β_2.

Je dis d'abord que pour $\lambda = 0$, c'est à dire pour $\mu = \mu_0$, tous ces termes sont nuls.

En effet supposons que les ξ soient assez petits pour qu'on en puisse négliger les carrés. Nous avons vu dans la 1[ère] partie que dans ce cas, les ξ satisfont à un système de deux équations différentielles linéaires, que nous avons appelées équations aux variations des équations (9). Nous avons vu également que ces équations linéaires admettent deux solutions remarquables; que la première de ces solutions est multipliée par $e^{2\alpha\pi}$ quand y_1 augmente de 2π, et que l'autre est multipliée par $e^{-2\alpha\pi}$.

Pour $\lambda = 0$, $k\alpha$ est un multiple de $2i\pi$ de sorte que $e^{2\alpha\pi}$ et $e^{-2\alpha\pi}$ sont deux racines k^{es} de l'unité. Donc nos deux solutions se reproduisent quand y_1 augmente de $2k\pi$. Comme l'équation est linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions remarquables, et elle ne change pas non plus quand y_1 augmente de $2k\pi$.

Comme ψ_1 et ψ_2 sont précisément les accroissements que subissent ξ_1 et ξ_2 quand y_1 passe de la valeur 0 à la valeur $2k\pi$, ψ_1 et ψ_2 doivent être nuls; mais cela n'est vrai que quand ξ_1 et ξ_2 (ou β_1 et β_2) sont assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés; ce seront donc seulement les termes de ψ_1 et ψ_2 qui sont du 1[er] degré en β_1 et β_2 qui seront nuls.

C. Q. F. D.

Soient:

$$a\beta_1 + b\beta_2 \quad \text{les termes du premier degré de} \quad \psi_1,$$
$$c\beta_1 + e\beta_2 \quad \text{les termes du premier degré de} \quad \psi_2.$$

Nous venons de voir que pour $\lambda = 0$

$$a = b = c = e = 0.$$

Soit encore pour $\lambda = 0$:

$$\frac{da}{d\lambda} = a', \qquad \frac{db}{d\lambda} = b', \qquad \frac{dc}{d\lambda} = c'. \qquad \frac{de}{d\lambda} = e'.$$

Je dis que

$$a' + e' = 0.$$

En effet l'équation en S

$$(a - S)(e - S) - bc = 0$$

admet pour racines: (cf. § 12)

$$S = 1 - e^{2\alpha k\pi}, \qquad S = 1 - e^{-2\alpha k\pi};$$

pour $\lambda = 0$, ces deux racines sont nulles; si λ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, elles seront égales à:

$$\pm\, 2k\pi \frac{d\alpha}{d\lambda}\lambda.$$

L'équation en S:

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

aura donc pour racines

$$S = \pm\, 2k\pi \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

et comme ces deux racines sont égales et de signe contraire on aura:

$$a' + e' = 0.$$

De plus a', e', b' et c' ne seront pas nuls à la fois en général. En effet cela ne pourrait avoir lieu que si $\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\mu}$ était nul. Or μ_0 est une quantité choisie de telle sorte que α (qui est une fonction de μ) soit commensurable avec $2i\pi$. Or $\frac{d\alpha}{d\mu}$ ne pourrait s'annuler pour toutes les valeurs commensurables de $\frac{\alpha}{2i\pi}$ qu'en s'annulant identiquement; alors α serait une constante (qui devrait d'ailleurs être nulle puisque $\alpha = 0$ pour $\mu = 0$) ce qui n'a pas lieu en général.

Nous avons vu que pour $\lambda = 0$ les termes du 1^{er} degré de ψ_1 et de ψ_2 s'annulent identiquement. Supposons qu'il en soit de même des termes du 2^d degré, du 3^e degré, etc., du $m - 1^e$ degré, mais que les termes du m^e degré ne s'annulent pas identiquement dans ψ_1 et dans ψ_2 pour $\lambda = 0$. Soit θ_1 l'ensemble des termes du m^e degré de ψ_1 pour $\lambda = 0$; soit θ_2 l'ensemble des termes du m^e degré de ψ_2 pour $\lambda = 0$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont deux polynômes homogènes du m^e degré en β_1 et β_2 et de ces deux polynômes l'un au moins ne s'annule pas identiquement.

Posons:

$$\psi_1 = a'\lambda\beta_1 + b'\lambda\beta_2 + \theta_1 + \omega_1,$$

$$\psi_2 = c'\lambda\beta_1 - a'\lambda\beta_2 + \theta_2 + \omega_2.$$

Alors ω_1 et ω_2 seront un ensemble de termes qui seront: ou bien du $(m + 1)^e$ degré au moins par rapport aux β, ou bien du second degré au moins par rapport aux β et du 1^{er} degré au moins par rapport à λ, ou bien du 1^{er} degré au moins par rapport aux β et du 2^d degré au moins par rapport à λ.

Je me propose de démontrer que l'on peut tirer des équations (10) β_1 et β_2 en séries ordonnées suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$ et dont tous les termes ne sont pas nuls.

Mais il faut d'abord que je démontre que l'on a identiquement:

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

En effet il existe un invariant intégral positif. Nous en concluons qu'il existe une intégrale

$$\iint \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

qui a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$ et pour toutes ses conséquentes.

De plus la fonction Φ est positive. Donc $\Phi(0, 0)$ n'est pas nul; en multipliant la fonction Φ par un facteur convenable, nous pourrons donc toujours supposer:

$$\Phi(0, 0) = 1.$$

Mais le point:

$$\xi_1 = \beta_1 + \psi_1, \qquad \xi_2 = \beta_2 + \psi_2, \qquad y_1 = 2k\pi$$

est le k^e conséquent du point:

$$\xi_1 = \beta_1, \qquad \xi_2 = \beta_2, \qquad y_1 = 0.$$

On aura donc pour une aire quelconque:

$$\iint \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)(d\beta_1 + d\psi_1)(d\beta_2 + d\psi_2) = \iint \Phi(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2$$

d'où l'identité:

$$(11) \quad \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2)\left[\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1}\right] = \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

Nous supposerons $\lambda = 0$, nous aurons donc:

$$\psi_1 = \theta_1 + \omega_1, \qquad \psi_2 = \theta_2 + \omega_2.$$

Les θ ne contiennent alors que des termes du m^e degré et les ω que des termes du $(m + 1)^e$ degré ou de degré supérieur.

Il résulte de là que la différence:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) - \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

ne contient que des termes du m^e degré au moins par rapport à β_1 et à β_2. Si l'on convient de négliger les termes du m^e degré et de degré supérieur, on pourra écrire:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) = \Phi(\beta_1, \beta_2).$$

On aura, en négligeant toujours les termes du m^e degré:

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} = 1 + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} = \frac{d\theta_1}{d\beta_2}, \qquad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = \frac{d\theta_2}{d\beta_1}$$

et

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

de sorte qu'en identifiant dans l'identité (11) tous les termes de degré inférieur à m, on arrive à la relation:

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)\left(\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2}\right) = 0.$$

Dans le premier membre cette relation, nous ne devons conserver que les termes de degré $m - 1$ au plus de sorte qu'il reste:

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

C. Q. F. D.

Posons:

$$\lambda = \pm \eta^{m-1}, \qquad \beta_1 = \gamma_1\eta, \qquad \beta_2 = \gamma_2\eta;$$

on voit que θ_1 et θ_2 deviennent divisibles par η^m et ω_1 et ω_2 par η^{m+1}, de sorte qu'on peut poser:

$$\theta_1 = \eta^m\theta_1', \qquad \theta_2 = \eta^m\theta_2', \qquad \omega_1 = \eta^{m+1}\omega_1', \qquad \omega_2 = \eta^{m+1}\omega_2',$$

d'où:

$$\psi_1 = \pm \eta^m(a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \eta^m\theta_1' + \eta^{m+1}\omega_1',$$
$$\psi_2 = \pm \eta^m(c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \eta^m\theta_2' + \eta^{m+1}\omega_2',$$

de sorte que nos équations (10) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\pm (a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \theta_1' + \eta\omega_1' = 0, \\ &\pm (c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \theta_2' + \eta\omega_2' = 0. \end{aligned}$$

Je dis qu'on peut tirer de ces équations γ_1 et γ_2 en séries ordonnées suivant les puissances de η et sans que ces séries soient identiquement nulles.

En vertu du théorème IV, § 2, il nous suffit pour cela d'établir:

1°. Que les équations (12), quand on y fait $\eta = 0$, admettent au moins un système de solutions réelles:

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0.$$

2°. Que si l'on fait:

$$\eta = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0$$

le déterminant fonctionnel des premiers membres des deux équations (12) par rapport à γ_1 et γ_2 n'est pas nul.

Cela revient à dire que, pour les équations (12) réduites par la supposition de $\eta = 0$, la solution

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^0$$

doit être une solution simple.

Mais en vertu des théorèmes V et VI du § 2 et de leurs corollaires, on peut encore développer γ_1 et γ_2 suivant les puissances de η, quand même cette solution serait multiple, pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.

Nous sommes donc conduits à envisager les équations:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\pm(a'\gamma_1 + b'\gamma_2) + \theta_1' = 0, \\ &\pm(c'\gamma_1 - a'\gamma_2) + \theta_2' = 0 \end{aligned}$$

et nous devons chercher à démontrer que ces équations admettent au moins une solution réelle d'ordre impair.

De ces équations nous pouvons tirer la suivante:

$$(14) \qquad (a'\gamma_1 + b'\gamma_2)\theta_2' - (c'\gamma_1 - a'\gamma_2)\theta_1' = 0$$

qui est homogène et dont on pourra par conséquent tirer le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Il est clair que θ_1' et θ_2' sont formés avec γ_1 et γ_2 comme θ_1 et θ_2 avec β_1 et β_2; on aura donc:

$$\frac{d\theta_1'}{d\gamma_1} + \frac{d\theta_2'}{d\gamma_2} = 0.$$

Cela prouve qu'il existe un polynôme f homogène et de degré $m + 1$ en γ_1 et γ_2 et qui est tel que:

$$\theta_1' = \frac{df}{d\gamma_2}, \qquad \theta_2' = -\frac{df}{d\gamma_1}.$$

De même si nous posons:

$$f_1 = \frac{1}{2}(b'\gamma_2^2 + 2a'\gamma_1\gamma_2 - c'\gamma_1^2)$$

il vient:

$$a'\gamma_1 + b'\gamma_2 = \frac{df_1}{d\gamma_2}, \qquad c'\gamma_1 - a'\gamma_2 = -\frac{df_1}{d\gamma_1}$$

de sorte que l'équation (14) peut s'écrire:

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Considérons l'expression:

$$H = \frac{f^2}{f_1^{m+1}}.$$

Elle est homogène et de degré 0 par rapport à γ_1 et γ_2; elle ne dépend donc que du rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Je dis que le dénominateur f_1 ne peut jamais s'annuler.

En effet l'équation:

$$(a' - S)(c' - S) - b'c' = 0$$

doit avoir ses deux racines imaginaires, d'où:

$$a'c' - b'c' = -a'^2 - b'c' < 0$$

d'où:

$$a'^2 + b'c' > 0,$$

ce qui prouve que la forme quadratique f_1 est définie. L'expression H ne peut donc jamais devenir infinie. Elle admettra donc au moins un maximum. Pour ce maximum on devra avoir:

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Ainsi l'équation (14) admet au moins une racine réelle. Elle sera en général simple. En tout cas, elle sera toujours d'ordre impair, car un maximum ne peut correspondre qu'à une racine d'ordre impair.

Nous avons tiré de l'équation (14) le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$; nous pouvons donc poser:

$$\gamma_1 = \delta_1 u, \qquad \gamma_2 = \delta_2 u,$$

δ_1 et δ_2 étant des quantités connues.

Il nous reste maintenant à déterminer u. Pour cela dans la première des équations (13) je remplace γ_1 et γ_2 par $\delta_1 u$ et $\delta_2 u$, il vient:

$$\theta_1' = u^m \theta_1'', \qquad \theta_2' = u^m \theta_2'',$$

θ_1'' étant formé avec δ_1 et δ_2 comme θ_1' avec γ_1 et γ_2; d'où:

$$\pm (a'\delta_1 + b'\delta_2) + \theta_1'' u^{m-1} = 0. \tag{15}$$

Cette équation doit déterminer u; si m est pair elle aura une racine réelle; si m est impair (et c'est d'ailleurs ce qui arrivera en général) elle aura deux racines réelles, ou pas de racine réelle; elle aura deux racines réelles si θ_1'' et $\pm (a'\delta_1 + b'\delta_2)$ sont de signe contraire; mais on peut toujours grâce au double signe $\pm$, s'arranger pour qu'il en soit ainsi.

L'équation (15) admet donc au moins une racine réelle. De plus cette racine est simple. Il n'y aurait d'exception que si

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_1'' = 0.$$

Mais dans ce cas on remplacerait l'équation (15) par la suivante:

$$\pm (c'\delta_1 - a'\delta_2) + \theta_2'' u^{m-1} = 0.$$

Il n'y aurait donc plus de difficulté que si on avait à la fois:

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = c'\delta_1 - a'\delta_2 = 0$$

ou bien

$$\theta_1'' = \theta_2'' = 0.$$

La première circonstance ne peut pas se produire, à cause de l'inégalité:

$$a'^2 + b'c' > 0.$$

La seconde circonstance pourrait au contraire se présenter. Il peut se faire que l'équation (14) admette une racine telle que $\theta_1' = \theta_2' = 0$. Mais je dis que dans ce cas l'équation (14) admettra encore au moins une racine pour laquelle cette circonstance ne se produira pas.

En effet on a identiquement:

$$mf = \gamma_2 \theta_1' - \gamma_1 \theta_2'.$$

Si donc:

$$\theta_1' - \theta_2' = 0$$

on aura $f = 0$ et puisque f_1 n'est jamais nul

$$H = 0.$$

Il peut se faire en effet que l'expression H admette 0 comme maximum ou comme minimum. Mais cette expression n'est pas identiquement nulle puisque θ_1' et θ_2' ne sont pas tous deux identiquement nuls; de plus elle reste toujours finie; elle devient donc soit positive, soit négative; si elle devient positive, elle aura un maximum positif et différent de 0; si elle devient négative elle aura un minimum négatif et différent de 0.

Ainsi l'équation (14) admet toujours au moins une racine réelle d'ordre impair telle que θ_1'' et θ_2'' ne s'annulent pas à la fois.

Donc les équations (13) ont au moins une solution réelle d'ordre impair.

Donc on peut trouver des séries qui ne sont pas identiquement nulles, qui sont développables suivant les puissances fractionnaires positives de $\mu - \mu_0$ et qui satisfont aux équations (10) quand on les substitue à β_1 et β_2.

Donc il existe un système de solutions périodiques de période $2k\pi$ qui pour $\mu = \mu_0$ se confondent avec la solution

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \qquad x_2 = \varphi_2(y_1).$$

Ce sont les solutions périodiques du 2^e^ genre.

§ 21. *Divergence des séries de M. Lindstedt.*

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, non seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'étrangeté des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

Je me propose d'abord de démontrer que les séries proposées par M. Lindstedt ne sont pas convergentes; mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. Lindstedt. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je désire, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

Mettons les équations de la dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent mémoire et écrivons:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2, indépendante de y_1 et de y_2; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la *fonction perturbatrice.*

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de la dynamique et en particulier les problèmes de la mécanique céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2, les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ.

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, les différences:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2$$

seront du même ordre de grandeur que μ, ce qui nous permettra de poser:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu\varphi_1(x_1, x_2),$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu\varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors:

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés *directement* comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables:

$$w_1 \quad \text{et} \quad w_2$$

et que l'on pose:

$$w_1 = \lambda_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = \lambda_2 t + \varpi_2.$$

ϖ_1 et ϖ_2 seront des constantes d'intégration arbitraires; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complètement.

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 \frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_1}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_1} = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_2} = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right) = 0, \\ &\lambda_1 \frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots, \\ y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu\lambda_1^1 + \mu^2\lambda_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu\lambda_2^1 + \mu^2\lambda_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je suppose que les coefficients λ_i^k sont des constantes et que les coefficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2.

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1 est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et de y_2 et que les coefficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2.

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2, x_1$ et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ et il est clair que les coefficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2.

J'appelle:

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \quad \text{et} \quad \Phi_2'$$

ces quatre fonctions.

Cela posé, le théorème de M. Lindstedt consiste en ceci:

Il est possible, quelque grand que soit q, de déterminer les $2q+2$ constantes

$$\lambda_1^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^q,$$

$$\lambda_2^0, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_2^q,$$

et les $4q$ séries trigonométriques:

$$x_1^0, \ldots, x_1^q,$$

$$x_2^0, \ldots, x_2^q,$$

$$y_1^1, \ldots, y_1^q,$$

$$y_2^1, \ldots, y_2^q,$$

de façon à annuler dans

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \quad \text{et} \quad \Phi_2'$$

les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ, de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1}.

On trouve d'abord:

$$\lambda_1^0 = n_1, \qquad \lambda_2^0 = n_2, \qquad x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, \qquad x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposerons de l'ordre de μ.

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable:

$$\lambda_i^0, \lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^{q-1},$$

$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{q-1},$$

$$y_i^1, \ldots, y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer

$$\lambda_1^q, \lambda_2^q, x_1^q, x_2^q, y_1^q, y_2^q.$$

Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2 et Φ_1', Φ_2'.

Il vient:

$$(3)\qquad \begin{aligned} n_1\frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2\frac{dx_1^q}{dw_2} &= X_1, \\ n_1\frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2\frac{dx_2^q}{dw_2} &= X_2, \\ n_1\frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2\frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q &= Y_1, \\ n_1\frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2\frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q &= Y_2, \end{aligned}$$

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant des fonctions connues.

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2.

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible, il faut:

1° que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, ce qu'il est toujours permis de supposer.

2° que dans les séries trigonométriques X_1 et X_2, les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi, mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux.

3° que dans les séries trigonométriques Y_1 et Y_2 les termes tout connus se réduisent à λ_1^q et λ_2^q; comme λ_1^q et λ_2^q sont deux inconnues, nous déterminerons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autres constantes arbitraires que ω_1, ω_2, ϖ_1 et ϖ_2.

Ainsi les séries de M. Lindstedt sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi suivant les puissances des deux constantes ω_1 et ω_2.

Ces séries d'après le théorème de M. Lindstedt, satisfont *formellement* aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet supposons qu'il en soit ainsi et que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ, de ω_1 et de ω_2.

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2. Pour certaines valeurs de ω_1 et ω_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre *d'exposants caractéristiques*. Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations données.

Soit:

$$x_1 = \phi_1(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad x_2 = \phi_2(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2),$$

$$y_1 = \phi_1'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad y_2 = \phi_2'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2)$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à ω_1, ω_2, ϖ_1 et ϖ_2 des valeurs déterminées ω_1^0, ω_2^0, ϖ_1^0, ϖ_2^0, les fonctions ϕ_1, ϕ_2, ϕ_1', ϕ_2' deviennent périodiques en t. Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1},\ \frac{dx_2}{d\omega_1},\ \frac{dy_1}{d\omega_1},\ \frac{dy_2}{d\omega_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1},\ \frac{dx_2}{d\varpi_1},\ \frac{dy_1}{d\varpi_1},\ \frac{dy_2}{d\varpi_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\omega_2},\ \frac{dx_2}{d\omega_2},\ \frac{dy_1}{d\omega_2},\ \frac{dy_2}{d\omega_2},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_2},\ \frac{dx_2}{d\varpi_2},\ \frac{dy_1}{d\varpi_2},\ \frac{dy_2}{d\varpi_2}$$

et nous y ferons ensuite

$$\omega_1 = \omega_1^0, \qquad \omega_2 = \omega_2^0, \qquad \varpi_1 = \varpi_1^0, \qquad \varpi_2 = \varpi_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ par exemple prendra la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t}\theta_0(t) + e^{\alpha_2 t}\theta_2(t) + e^{\alpha_3 t}\theta_3(t) + e^{\alpha_4 t}\theta_4(t),$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons:

$$x_1 = \varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2.

Il vient alors:

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \qquad \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}\right)t.$$

Les trois fonctions:

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1},\ \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t.

On trouverait pour $\frac{dx_1}{d\varpi_2}$ et $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, *si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tout les exposants caractéristiques seraient nuls.*

Dans quel cas en est-il ainsi?

Nous avons vu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (§§ 10 et 12).

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu \frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu \frac{dF_1}{dx_i}$$

pouvaient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coefficient α_1 de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation:

Nous avions posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}, \qquad B_{ik}^2 = \frac{d^2F_1}{dy_i dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacés par x_1^0 et x_2^0, pendant que y_1 et y_2 sont remplacés par $n_1 t + \varpi_1$, $n_2 t + \varpi_2$.[1] C_{ik}^0 est donc une constante et B_{ik}^2 une fonction périodique de t. J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite:

$$e_{11} = b_{11} C_{11}^0 + b_{12} C_{21}^0, \qquad e_{21} = b_{21} C_{11}^0 + b_{22} C_{21}^0,$$

$$e_{12} = b_{11} C_{12}^0 + b_{12} C_{22}^0, \qquad e_{22} = b_{21} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0.$$

L'équation qui nous donne α_1 s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines nulles, il faudrait que l'on eût:

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

[1] Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de M. Lindstedt. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

et

$$b_{11}C_{11}^0 + 2b_{12}C_{12}^0 + b_{22}C_{22}^0 = 0. \tag{4}$$

Or on a comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité

$$n_1 b_{11} + n_2 b_{12} = n_1 b_{21} + n_2 b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que:

$$b_{11} = 0 \tag{5}$$

ou bien que:

$$n_2^2 C_{11}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_1^2 C_{22}^0 = 0. \tag{6}$$

Occupons-nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2$$

F_1 deviendra une fonction périodique de t. Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ψ le terme tout connu; ψ sera une fonction périodique de ϖ_1 et ϖ_2 et il viendra:

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k}.$$

Nous devrons donc avoir:

$$\frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} = 0. \tag{7}$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps a été choisi de telle sorte que ϖ_2 soit nul et que ψ soit fonction périodique de ϖ_1 seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. Lindstedt convergeaient) satisfaite identiquement. Et en effet si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ψ est une fonction périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire:

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire:

$$F_1 = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \Sigma B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2.

On aura alors

$$\psi = \mathrm{S} A^0_{m_1 m_2} \cos(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2) + \mathrm{S} B^0_{m_1 m_2} \sin(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2),$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A^0_{m_1 m_2}$ et $B^0_{m_1 m_2}$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0.

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ψ, on aura

$$A^0_{m_1 m_2} = B^0_{m_1 m_2} = 0.$$

Ainsi les coefficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que:

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons examiné et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_1^2} - 2\frac{dF_0}{dx_1}\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Elle exprime que la courbe

$$F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$$

a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$ devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas particulier que nous laisserons de côté; car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, *dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.*

§ 22. *Non-existence des intégrales uniformes.*

Reprenons nos équations de la dynamique avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i = 1, 2)$$

Ces équations admettent une intégrale:

$$F = \text{const.}$$

Cette intégrale F est une fonction analytique et uniforme de x_1, x_2, y_1, y_2 et μ; périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'autre intégrale jouissant des mêmes propriétés.

Soit en effet:

$$\Phi = \text{const.}$$

une autre intégrale analytique uniforme par rapport aux x, aux y et à μ et périodique par rapport aux y.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = \varphi_3(t), \qquad y_2 = \varphi_4(t)$$

une solution périodique (de période T) de nos équations différentielles.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \quad y_1 = \varphi_3(t) + \xi_3, \quad y_2 = \varphi_4(t) + \xi_4.$$

Soit β_i la valeur de ξ_i pour $t = 0$; soit $\beta_i + \psi_i$ la valeur de ξ_i pour $t = T$; nous savons que les ψ sont développables suivant les puissances croissantes des β. Considérons l'équation en S:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales à

$$e^{\alpha T} - 1,$$

les α étant les exposants caractéristiques; deux de ces racines sont donc nulles, et dans le cas particulier du problème des trois corps que nous traitons, les deux autres racines doivent être différentes de o.

Je remarque d'abord que nous avons:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0. \end{aligned} \qquad (i=1,2,3,4)$$

Dans les dérivées de F et de Φ, x_1, x_2, y_1 et y_2 doivent être remplacées par $\varphi_1(T)$, $\varphi_2(T)$, $\varphi_3(T)$, $\varphi_4(T)$.

On peut en conclure ou bien que l'on a:

$$(2) \qquad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\Phi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\Phi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\Phi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\Phi}{dy_2}}$$

ou bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β est nul ainsi que tous ses mineurs du 1^er ordre.

D'autre part on a, en désignant pas $\varphi_i'(t)$ la dérivée de $\varphi_i(t)$:

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_1}\varphi_1'(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\varphi_2'(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_3}\varphi_3'(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_4}\varphi_4'(0) = 0, \qquad (i=1,2,3,4) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx_1}\varphi_1'(0) + \frac{dF}{dx_2}\varphi_2'(0) + \frac{dF}{dy_1}\varphi_3'(0) + \frac{dF}{dy_2}\varphi_4'(0) = 0, \\ &\frac{d\Phi}{dx_1}\varphi_1'(0) + \frac{d\Phi}{dx_2}\varphi_2'(0) + \frac{d\Phi}{dy_1}\varphi_3'(0) + \frac{d\Phi}{dy_2}\varphi_4'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

De ces équations on peut conclure par un calcul très simple dont on trouvera plus loin le détail que si les équations (2) ne sont pas satisfaites:

ou bien on aura:

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0; \tag{5}$$

ou bien l'équation en S aura trois racines nulles (les quatre racines devraient même être nulles, puisque les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire).

Or nous savons que l'équation en S n'a que deux racines nulles; d'autre part les équations (5) ne peuvent être satisfaites que pour certaines solutions périodiques très particulières (je veux dire pour celles qui sont étudiées dans la Mécanique céleste de Laplace, livre X, chapitre VI) et où le troisième corps décrit comme les deux premiers une circonférence.

Les équations (2) devront donc être satisfaites. Elle devront l'être pour:

$$x_1 = \varphi_1(T), \qquad x_2 = \varphi_2(T), \qquad y_1 = \varphi_3(T), \qquad y_2 = \varphi_4(T).$$

Mais comme l'origine du temps est restée arbitraire, elles devront l'être également quel que soit t pour:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad y_1 = \varphi_3(t), \qquad y_2 = \varphi_4(t).$$

En d'autres termes, elles le seront pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je dis maintenant que ces équations sont satisfaites identiquement. Posons par exemple:

$$f = \frac{d\Phi}{dx_2}\frac{dF}{dx_1} - \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dF}{dx_2}.$$

Il est clair que f sera encore une fonction analytique et uniforme; on aura $f = 0$ pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je veux établir que f est identiquement nul; pour cela je vais montrer que l'on a identiquement pour $\mu = 0$:

$$0 = f = \frac{df}{d\mu} = \frac{d^2f}{d\mu^2} = \dots.$$

En effet considérons une solution périodique quelconque du 1^er^ genre; soit:

$$x_1 = \varphi_1(t, \mu), \qquad x_2 = \varphi_2(t, \mu), \qquad y_1 = \varphi_3(t, \mu), \qquad y_2 = \varphi_4(t, \mu)$$

cette solution; les fonctions φ seront développables suivant les puissances de μ et quand μ tendra vers 0, elles tendront respectivement vers:

$$x_1^0, \; x_2^0, \; n_1 t + \varpi_1, \; n_2 t + \varpi_2.$$

(x_1^0 et x_2^0 étant des constantes telles que $\frac{n_1}{n_2}$ soit commensurable et ϖ_1 et ϖ_2 les quantités définies dans le § 11). Tant que μ n'est pas nul on aura:

$$f[\varphi_1(t, \mu), \varphi_2(t, \mu), \varphi_3(t, \mu), \varphi_4(t, \mu)] = 0.$$

Mais la fonction f étant analytique et par conséquent continue, on aura encore pour $\mu = 0$ (bien que pour $\mu = 0$ les exposants caractéristiques s'annulent):

$$f(x_1^0, x_2^0, n_1 t + \varpi_1, n_2 t + \varpi_2) = 0.$$

Mais si l'on considère un système quelconque de valeurs de x_1 et de x_2 on pourra toujours trouver un système x_1^0 et x_2^0 qui en différera aussi peu que l'on voudra et qui correspondra à une valeur commensurable de $\frac{n_1}{n_2}$. Soit alors:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

λ_1 et λ_2 étant deux entiers premiers entre eux. Nous choisirons t de façon que:

$$n_1 t + \varpi_1 = y_1 + 2k\pi. \qquad (k \text{ entier})$$

On aura alors:

$$n_2 t + \varpi_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2.$$

Si nous posons:

$$n_2 t + \varpi_2 = y_2^0 + 2k'\pi \qquad (k' \text{ entier})$$

on devra avoir:

$$f(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

Etant donnée une valeur quelconque de y_2, on peut choisir les entiers k et k' de telle façon que la différence $y_2 - y_2^0$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{2\pi}{\lambda_1}$. Mais nous pouvons toujours choisir x_1^0 et x_2^0 de façon que ce système de valeurs diffère aussi peu que l'on veut de x_1 et de x_2, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ tout en étant commensurable soit tel que le nombre entier λ_1 soit aussi grand que l'on veut. Par conséquent, étant donné un système quelconque de valeurs de x_1, x_2, y_1 et y_2 on pourra trouver un système de valeurs qui en différera aussi peu qu'on voudra et pour lequel f sera nul. Comme la fonction f est analytique elle devra donc être identiquement nulle pour $\mu = 0$.

Cela posé, comme

$$f[\varphi_i(t, \mu)] = 0$$

quels que soient t et μ; il vient, pour tous les points de la solution périodique:

$$\frac{df}{d\mu} + \frac{df}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{df}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{d\mu} + \frac{df}{dy_1}\frac{d\varphi_3}{d\mu} + \frac{df}{dy_2}\frac{d\varphi_4}{d\mu} = 0.$$

Cette relation sera vraie en particulier pour

$$\mu = 0, \qquad x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Mais, quand μ est nul, f est identiquement nulle, par conséquent ses dérivées par rapport aux x et aux y sont nulles. On a donc:

$$\frac{df}{d\mu} = 0$$

pour $\mu = 0$, $x_i = x_i^0$, $y_i = n_i t + \varpi_i$; et on en conclurait comme plus haut que $\frac{df}{d\mu}$ est identiquement nul pour $\mu = 0$.

On démontrerait de la même manière que $\frac{d^2f}{d\mu^2}$, et les autres dérivées de f par rapport à μ sont nulles pour $\mu = 0$.

Donc la fonction f est identiquement nulle et les équations (2) sont des identités.

Mais, s'il en est ainsi, cela veut dire que Φ est une fonction de F, et que les deux intégrales Φ et F ne sont pas distinctes.

Nos équations ne comportent donc pas d'autre intégrale analytique et uniforme que $F = \text{const}$.

Quand je dis que ces équations n'admettent pas d'intégrale uniforme, je ne veux pas dire seulement qu'elles n'ont pas d'intégrale qui reste analytique et uniforme pour toutes les valeurs de x, de y et de μ.

Je veux dire qu'en dehors de l'intégrale F, ces équations n'admettent pas d'intégrale qui reste analytique, uniforme (et périodique de y_1 et y_2) pour toutes les valeurs de y_1 et de y_2 et pour les valeurs suffisamment petites de μ, quand x_1 et x_2 parcourent un domaine quelconque, si petit d'ailleurs que soit ce domaine.

On sait que Bruns a démontré qu'en dehors des intégrales connues, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale algébrique. Ce résultat se trouve donc conformé par une voie entièrement différente.

J'ai annoncé plus haut que les équations (1), (3) et (4) entraînent forcément une des trois conséquences suivantes: ou bien les équations (2) sont satisfaites, ou bien ce sont les équations (5), ou bien l'équation en S a au moins trois racines nulles.

En effet formons la matrice suivante à 4 lignes et 5 colonnes

$$(6) \qquad \left\| \frac{d\psi_i}{d\beta_1} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_2} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_3} \; \frac{d\psi_i}{d\beta_4} \; \varphi_i'(0) \right\|. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Si les équations (1) et (4) sont satisfaites sans que les équations (2) le soient, nous devons conclure que tous les déterminants obtenus en supprimant dans cette matrice deux colonnes et une ligne sont nuls.

Si maintenant l'on fait subir à x_1, x_2, y_1 et y_2 un changement linéaire de variables, les ψ et les β subiront ce même changement linéaire et la matrice (6) pourra être simplifiée.

On peut toujours supposer qu'on a choisi ce changement linéaire de telle sorte que

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k} = 0 \qquad\qquad \text{pour } i < k.$$

Alors les produits trois à trois des quatre quantités

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}, \frac{d\psi_2}{d\beta_2}, \frac{d\psi_3}{d\beta_3}, \frac{d\psi_4}{d\beta_4}$$

sont tous nuls, d'où il suit que deux au moins de ces quantités sont nulles. On peut toujours supposer que le changement linéaire a été choisi de telle sorte que ce soient $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$ et $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ qui soient nuls.

Si en outre une des deux quantités $\frac{d\psi_1}{d\beta_1}$ et $\frac{d\psi_2}{d\beta_2}$ est encore nulle, l'équation en S aura trois racines nulles.

Si au contraire aucune de ces deux quantités n'est nulle, les équations (3) permettent de conclure que

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0.$$

En supprimant dans la matrice (6) la 3^e^ et la 4^e^ colonne et la 3^e^ ligne, ou bien la 3^e^ et la 4^e^ colonne et la 4^e^ ligne, il vient:

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_3'(0) = \frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_4'(0) = 0;$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0,$$

c'est à dire si les équations (5) sont satisfaites; ou bien si

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

c'est à dire si l'équation en S a trois racines nulles.

C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

Tentatives de généralisation.

§ 23. *Problème des n corps.*

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la dynamique comportent plus de deux degrés de liberté et par conséquent au cas général du problème des n corps?

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'une représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p - 1$ dimensions. La plupart des conclusions de la première partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement. Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du § 17 en laissant de côté la question de convergence. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut-être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et reprenons les équations (1) du § 11 en faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3:

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

satisfaisant aux équations:

$$\frac{dx_1}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_1}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_1}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_2}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

$$\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_3}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_3} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, aux équations:

$$F = C, \qquad \frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}, \qquad \frac{dx_3}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_3}, \qquad \frac{dx_1}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_1}.$$

Nous supposerons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu = 0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Nous poserons ensuite comme plus haut:

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2, \qquad \frac{dF_0}{dx_3^0} = -n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3 il n'y a aucune relation linéaire à coefficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1, à y_2 et à y_3. Mais il s'introduit de petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3 il y a une relation linéaire et une seule à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le § 18. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et elles sont au moins doublement périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

$$m'_1 n_1 + m'_2 n_2 + m'_3 n_3 = 0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π et de telle sorte que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m'_1 y_1 + m'_2 y_2 + m'_3 y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la dynamique, *mais avec deux degrés de liberté seulement.* Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des chapitres I et II (1$^{\text{ère}}$ partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i; par conséquent, non seulement le hessien de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessien d'une fonction arbitraire de F_0 est encore nul. (Cf. page 121.) Cela vient du fait suivant: si $\mu = 0$, c'est à dire dans le mouvement Képlerien, les périhélies sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (1^{er} exemple, § 15) parce que nous avions pris pour variable, non pas g longitude du périhélie, mais $g - t$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences:

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques: les solutions du 1er genre, dont nous avons parlé dans le chapitre III (1ère partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ, et les solutions du 2d genre dont nous avons parlé dans le § 20 et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ.

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses Képleriennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du 1er genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouvement Képlerien? Les unes correspondent au cas où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre.* Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement Képlerien et *que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.*

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, je n'ai pu faire encore du cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance, et qu'ils y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.

ERRATUM.

Page 187, ligne 9, *au lieu de*

$$+\left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}+2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_2^0}+(x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right]$$

lisez

$$+\frac{1}{2}\left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}+2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_2^0}+(x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right].$$

OSCARI II

REGI AUGUSTISSIMO

QUUM MATHEMATICES ALIARUMQUE ARTIUM

VEL FAUTORI VEL CULTORI ERUDITISSIMO

TUM HUJUS OPERIS IAM INDE AB INITIO

AUSPICI LIBERALISSIMO

DEBITUM PIETATIS MUNUS

D. D. D.

EDITOR

AVANT-PROPOS.

Nous avons réuni dans ce tome les deux mémoires couronnés par S. M. le Roi le 21 janvier 1889.

A notre grand regret, nous ne pouvons y joindre que l'un des deux rapports présentés à leur sujet à S. M. par la Commission du prix. M. WEIERSTRASS avait bien voulu se charger de rédiger le rapport sur le mémoire de M. POINCARÉ; mais, souffrant depuis plus d'un an, il lui a malheureusement été impossible jusqu'ici de l'achever. Il nous autorise à dire que son rapport sera publié dès que l'état de sa santé lui aura permis d'y mettre la dernière main.

Nous insérons ci-dessous le rapport de M. HERMITE sur le mémoire de M. APPELL.

Le Rédacteur en chef.

Rapport de M. Hermite.

Les expressions des fonctions elliptiques par des séries simples de sinus et de cosinus, telles que les donne la formule de Fourier, ont à bien des points de vue une grande importance en Analyse. Elles ont été employées avec succès et jouent un rôle important dans beaucoup d'applications du calcul à la physique et à l'astronomie. Elles ont conduit Jacobi aux formules si remarquables du § 40 des *Fundamenta,* ou le grand géomètre, allant au delà des propositions connues de l'arithmétique, obtient le nombre des décompositions d'un entier quelconque en 2, 4, 6 et 8 carrés, exprimé au moyen des diviseurs de ce nombre. D'autres résultats d'une nature plus cachée, sur le nombre des classes de formes

quadratiques de déterminants négatifs, devaient encore découler de la même source analytique et mettre dans tout son jour, l'étroite correspondance des identités de la théorie des fonctions elliptiques avec la théorie des nombres. Nous les rappelons succinctement pour faire comprendre quelles espérances on avait dû concevoir de la découverte mémorable de Göpel et Rosenhain, lorsqu'on eut sous une forme entièrement semblable à celle des fonctions elliptiques, les fonctions quadruplement périodiques de deux variables, inverses des intégrales hyperelliptiques de première classe. Assurément il était possible de joindre aux expressions de ces nouvelles transcendantes par des quotients de fonctions θ, des développements en séries simples de sinus et de cosinus, mais la détermination effective des coefficients présente les plus grandes difficultés et n'a pu jusqu'à présent être abordée. Elle est le principal objet du mémoire dont nous allons analyser les méthodes et les résultats.

I. La solution donnée par Jacobi du problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, a été l'origine d'une notion analytique importante. Les expressions de l'illustre auteur présentent en effet, dans le cas le plus simple, l'exemple de fonctions qui se reproduisent multipliées par des constantes, lorsqu'on augmente la variable de l'une ou de l'autre des périodes. On a reconnu qu'elles constituent un nouveau genre de fonctions plus générales que les fonctions doublement périodiques, dont le rôle comme élément analytique propre, se montre dans beaucoup de questions importantes. Elles s'offrent en particulier, dans la rotation d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, dans la recherche de la figure de l'élastique gauche, dans le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, etc. Enfin elles donnent une méthode régulière d'une application facile, pour effectuer l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, à coefficients doublement périodiques, dans tous les cas où la solution est une fonction uniforme. Sous un autre point de vue, ces transcendantes peuvent encore être considérées comme provenant de l'intégrale elliptique la plus générale qui aura été mise en exponentielle, en y remplaçant la variable par un sinus d'amplitude. On peut aussi ne pas faire ce changement et conserver l'intégrale qui suivant le

contour décrit par la variable est susceptible d'une infinité de déterminations. Ces valeurs multiples s'obtenant par l'addition de constantes, les expressions dont nous parlons auront la propriété de se reproduire, multipliées par des facteurs constants, lorsqu'on fait décrire certains chemins à la variable. Qu'au lieu de considérer la variable sur un plan unique, on recoure à la conception de Riemann, de manière à remplacer par une fonction à sens unique, affectée de coupures, une expression à déterminations multiples, on parvient à une quantité dont les valeurs, lorsqu'on passe d'un bord à l'autre de la coupure, se reproduisent multipliées par une constante. Nous nous trouvons ainsi amené à l'idée fondamentale de l'auteur, à la notion analytique des nouvelles transcendantes, auxquelles il donne la dénomination de fonctions à multiplicateurs, et dont il établit les propriétés; voici succinctement les résultats auxquels il est parvenu.

II. Son point de départ est dans la considération d'une équation algébrique de genre p, et de la surface correspondante de Riemann, rendue simplement connexe, au moyen de coupures; ce sont les éléments qui lui permettent de définir d'une manière complète et précise, les fonctions à multiplicateurs, d'après les conditions suivantes. Elles seront uniformes sur la surface, elles ne présenteront aucune autre singularité que des pôles, et elles prendront aux deux bords infiniment voisins d'une coupure, des valeurs qui ne diffèrent que par des multiplicateurs constants. Ceci posé, voici un premier résultat d'une grande importance: toutes les fonctions qui satisfont aux conditions posées, leurs multiplicateurs étant des constantes données d'avance, peuvent s'exprimer au moyen des intégrales normales de troisième espèce qui sont attachées à l'équation algébrique. Viennent ensuite plusieurs théorèmes, le suivant qui est une généralisation de la proposition célèbre d'Abel, sur les intégrales de différentielles algébriques, mérite une attention particulière. Il consiste en ce que la somme des valeurs que prend une intégrale abélienne de première espèce, aux zéros d'une fonction à multiplicateurs, est égale à la somme des valeurs qui correspondent aux infinis de la même fonction, augmentée d'une constante dépendant uniquement des multiplicateurs. Après avoir déduit de là d'importantes conséquences sur le nombre des constantes arbitraires d'une fonction qui a des multiplicateurs et des pôles

donnés, l'auteur démontre qu'il existe en général $p - 1$ relations entre les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs, et p dans un cas spécial, comprenant en particulier celui des fonctions algébriques. Ce cas spécial intéressant tient à l'existence d'une fonction sans zéros, ni infinis, et qui admet les multiplicateurs donnés.

III. Les intégrales des fonctions à multiplicateurs sont ensuite le sujet d'une étude approfondie. L'auteur obtient à leur égard un ensemble de propositions qui correspondent exactement aux théorèmes célèbres de Riemann sur les intégrales abéliennes. Nous indiquerons comme exemples, leur classification en intégrales de première espèce qui sont toujours finies, en intégrales de seconde espèce n'ayant que des pôles, et en intégrales de troisième espèce où s'offrent des infinis logarithmiques. Nous citerons encore cette importante proposition, qu'en général il existe $p - 1$ intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, et p dans le cas particulier dont il a été question précédemment. Les modules de périodicité de ces intégrales, le long des coupures, sont liés aux multiplicateurs par des relations qui deviennent identiques, lorsque les multiplicateurs se réduisent à l'unité, et que les intégrales deviennent abéliennes. Entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce, à multiplicateurs inverses, existe une équation qui coïncide dans le cas particulier des multiplicateurs égaux à l'unité, avec la relation d'une importance capitale découverte par Riemann, entre les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Enfin l'auteur forme les intégrales normales des fonctions à multiplicateurs, de seconde et de troisième espèce, il établit des relations entre les modules de périodicité de ces intégrales et leurs multiplicateurs, puis d'autres entre ces modules et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses. L'ensemble de ces résultats rend manifeste l'analogie de la nouvelle théorie avec celle des intégrales abéliennes; la différence de nature analytique entre les deux genres de quantités apparaît toutefois dans cette circonstance qu'il existe une intégrale de troisième espèce avec un seul infini logarithmique, tandis qu'une intégrale abélienne de troisième espèce possède au moins deux infinis de cette nature. En dernier lieu nous signalerons dans la théorie des intégrales de seconde espèce ce théorème d'un grand intérêt, que toute fonction à multiplicateurs s'ex-

prime par une somme d'intégrales de seconde espèce ayant les mêmes facteurs, et qui deviennent chacune infinie en un seul point. C'est comme on le voit la généralisation de la belle formule de Riemann-Roch qui représente une fonction algébrique quelconque par une somme d'intégrales abéliennes de seconde espèce.

IV. Nous venons d'indiquer rapidement les points les plus essentiels de la théorie des fonctions à multiplicateurs. Nous avons montré qu'elle a pour première origine, les fonctions algébriques, leurs propriétés et celles de leur intégrales, telles que Riemann les a fait connaître, nous avons montré qu'elles constituent par l'ensemble de leurs caractères, de nouveaux éléments analytiques, où l'on retrouve dans un sens beaucoup plus général, toutes les propriétés des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Il nous faut maintenant revenir à la question principale que l'auteur a eue en vue en entreprenant ces belles et profondes recherches, où il a montré le plus remarquable talent d'invention. Son but était d'obtenir les intégrales définies réelles qui représentent les coefficients du développement par la formule de Fourier, des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes de deux variables, à quatre paires de périodes simultanées. Un changement de variables le conduit d'abord à des fonctions à multiplicateurs, et pour le cas des sinus d'amplitude qu'il traite en premier lieu, ses principes généraux lui permettent d'obtenir les coefficients du développement avec autant de simplicité que d'élégance. En appliquant ensuite la même méthode aux transcendantes de Göpel et de Rosenhain, il trouve les coefficients sous la forme d'une fonction rationnelle des constantes p, q, r qui figurent dans les fonctions θ à deux variables, multipliée par une intégrale définie ou entrent deux entiers indéterminés. C'est pour la théorie des fonctions abéliennes un résultat du plus haut intérêt; il donne la solution d'une question restée jusqu'ici inabordable, sous une forme simple qui permettra d'en poursuivre les conséquences; il ouvre la voie pour l'étude approfondie des développements par la formule de Fourier des fonctions abéliennes, et obtenir pour ces fonctions des développements qui procèdent suivant les puissances des trois quantités p, q, r. On peut donc attendre de voir ainsi se combler une grande lacune dans la théorie de ces transcendantes, on peut espérer de voir se rétablir autant que le comporte la nature des choses, l'analogie

avec les fonctions elliptiques, dans ce point d'une importance capitale où elles se lient aux propriétés des nombres. Pressé par la date fixée pour le terme du concours l'auteur a dû ajourner ces recherches qui auraient pu devenir le couronnement de son beau et savant mémoire. Mais il a grandement accompli sa tâche en posant les fondements d'une théorie qui ajoute au domaine de l'analyse un nouveau genre de fonctions, dont il a encore indiqué une autre application importante, à l'intégration des équations linéaires d'ordre quelconque à coefficients algébriques.

Nous pensons en résumé que le travail dont nous venons de faire l'exposé est l'oeuvre d'un géomètre de premier ordre, et qu'il sera placé au nombre des plus importantes productions mathématiques qui aient appelé dans ces dernières années l'attention des analystes.

Paris, 10 Janvier 1889.

SUR LES INTÉGRALES

DE FONCTIONS A MULTIPLICATEURS

ET LEUR APPLICATION

AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ABÉLIENNES

EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

P. APPELL
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
PAR S. M. LE ROI OSCAR II
LE 21 JANVIER 1889.

Nous devons l'unique science
Que l'homme puisse conquérir
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir.

(Sully-Prudhomme, Le Bonheur.)

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Les fonctions algébriques et leurs intégrales ont fait l'objet, depuis ABEL et RIEMANN, des plus profondes recherches des géomètres. En se plaçant au point de vue de RIEMANN, on peut définir les fonctions algébriques comme étant *uniformes* sur une surface de Riemann et n'admettant pas d'autres singularités que des *pôles;* les intégrales de ces fonctions algébriques ne sont pas uniformes sur la surface primitive de Riemann, mais le deviennent après qu'on a tracé sur cette surface des coupures appropriées; sur les deux bords d'une de ces coupures, les valeurs de l'intégrale ne diffèrent que par une constante.

De même qu'à côté des fonctions doublement périodiques ordinaires, viennent se placer les fonctions que M. HERMITE a nommées *fonctions doublement périodiques de seconde espèce* et qui se reproduisent, multipliées par des facteurs constants, quand la variable augmente de l'une ou l'autre des périodes; de même à coté des fonctions algébriques viennent se placer des fonctions qui sont uniformes sur une surface de Riemann rendue *simplement connexe,* qui n'admettent pas d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur constant.* Nous nommerons ces fonctions: *fonctions à multiplicateurs.*

Ces fonctions ont fait l'objet d'un mémoire de M. APPELL intitulé *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, janvier 1883).

Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier les *intégrales* des *fonctions à multiplicateurs,* ce qui constitue une recherche entièrement nouvelle[1] comprenant, comme cas particulier, la théorie des intégrales

[1] Nous devons cependant citer un Mémoire de M. PRYM qui se trouve dans le Tome 70 du Journal de CRELLE (p. 354) et dont nous n'avons eu connaissance que dans le courant de l'année 1889.

abéliennes, lorsque les multiplicateurs deviennent tous égaux à l'unité. Les intégrales des *fonctions à multiplicateurs* fournissent donc une extension naturelle des intégrales abéliennes.

Ces intégrales se présentent aussi, comme nous le montrerons, dans la résolution d'un problème d'une haute importance qui a, depuis longtemps, attiré l'attention des géomètres, à savoir le problème du *développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*. On n'a jusqu'à présent rien publié sur ces développements qui doivent avoir, dans la théorie des fonctions abéliennes, un rôle aussi important que les beaux développements en séries trigonométriques donnés par JACOBI dans la théorie des fonctions elliptiques. En traitant plus particulièrement le cas des fonctions abéliennes de genre 2, nous calculons le coefficient du terme général de leurs développements en séries trigonométriques; ce coefficient est d'une nature plus compliquée que celui des développements de JACOBI: il contient dans son expression une intégrale définie qui ne paraît pas pouvoir se réduire aux fonctions élémentaires et qui comprend comme cas très particulier les fonctions de BESSEL.

Cette même intégrale définie reparaît lorsqu'on veut, à l'aide d'une série trigonométrique, faire l'inversion d'une *intégrale hyperelliptique* en se restreignant à des valeurs réelles de l'intégrale et de la variable d'intégration.[1] La résolution de ce problème trouve de nombreuses applications en mécanique rationnelle.

Pour bien faire saisir l'esprit de la méthode, nous traitons d'abord le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\operatorname{sn} u,$$

c'est à dire de la fonction z de u définie par l'équation

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

et cela sans nous servir ni des propriétés des fonctions θ ni de la théorie des fonctions elliptiques.

[1] Voyez un Mémoire de M. WEIERSTRASS: *Über eine Gattung reell periodischer Functionen*, Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, p. 97.

La méthode que nous appliquons aux fonctions abéliennes peut aussi servir à développer en séries trigonométriques certaines racines carrées de fonctions abéliennes du genre 2, et certaines fonctions de plusieurs variables analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Ce travail est divisé en *trois parties:* la première contient un résumé des principales propriétés des *fonctions à multiplicateurs,* la seconde est consacrée à l'étude des intégrales de ces fonctions, la troisième aux applications et principalement au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Nous suivons, dans ce travail, les notations et la terminologie de M. C. Neumann dans l'ouvrage intitulé: *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale,* von Dr. *C. Neumann,* zweite Auflage; Leipzig, Teubner, 1884.

Première partie.

Sur les fonctions à multiplicateurs.

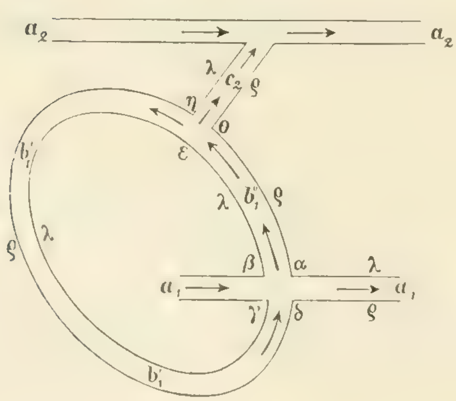
Soit une équation algébrique

$$F(s, z) = 0$$

du genre p et R la surface de Riemann correspondante. Désignons, avec C. Neumann (loc. cit. pages 175—185), par R_{abc} cette surface de Riemann rendue *simplement connexe* par les coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \ b_1, b_2, \ldots, b_p; \ c_2, c_3, \ldots, c_p.$$

Nous appellerons *fonction à multiplicateurs* une fonction uniforme et régulière (c'est à dire, d'après Neumann, n'admettant que des pôles) sur la surface R_{abc}, cette fonction étant telle que ses valeurs sur les deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur* constant tout le long de la coupure.



Il est aisé de voir que, *le long de chacune des coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, ce multiplicateur est égal à l'unité.* En effet, reprenons la figure de C. Neumann (loc. cit. page 216) avec quelques additions, et supposons qu'une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ admette le long de la coupure a_1 le multiplicateur m_1, sur la portion b_1' de la coupure b_1 le multiplicateur

n'_1, sur la portion b''_1 de cette même coupure le multiplicateur n''_1, enfin le long de la coupure c_2 le multiplicateur k_2. Cela veut dire que, si l'on appelle, avec NEUMANN, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de } a_1: \ \Phi(\lambda) = m_1 \Phi(\rho), \\
&\text{le long de } b'_1: \ \Phi(\lambda) = n'_1 \Phi(\rho), \\
&\text{le long de } b''_1: \ \Phi(\lambda) = n''_1 \Phi(\rho), \\
&\text{le long de } c_2: \ \Phi(\lambda) = k_2 \Phi(\rho).
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$k_2 = 1, \qquad n'_1 = n''_1.$$

Au point de croisement $\alpha\beta\gamma\delta$ des coupures a_1 et b_1 on a (voyez la figure page 8)

$$\Phi(\alpha) = m_1 \Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = m_1 \Phi(\gamma),$$
$$\Phi(\gamma) = n'_1 \Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = n''_1 \Phi(\alpha),$$

d'où l'on tire immédiatement en éliminant $\Phi(\alpha)$, $\Phi(\beta)$, $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\delta)$

$$m_1(n'_1 - n''_1) = 0$$

donc

$$n'_1 = n''_1,$$

car aucun multiplicateur ne peut être nul. De même au point de croisement $\varepsilon\eta\theta$ des coupures b_1 et c_2, on a, en appelant maintenant n_1 la valeur commune de n'_1 et n''_1,

$$\Phi(\varepsilon) = n_1 \Phi(\eta), \qquad \Phi(\varepsilon) = n_1 \Phi(\theta), \qquad \Phi(\eta) = k_2 \Phi(\theta),$$

d'où il résulte

$$k_2 = 1.$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, le multiplicateur le long de la coupure c_2 est l'unité; la fonction $\Phi(z)$ prend les mêmes valeurs sur les deux bords de c_2. Il en est de même pour les coupures $c_3, c_4, \ldots, c_p$.

On pourra donc supprimer toutes ces coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$ sans que la fonction $\Phi(z)$ cesse d'être uniforme.

En résumé, une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ est uniforme sur la surface que C. Neumann appelle R_{ab} et que l'on obtient en traçant sur la surface R de Riemann les seules coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Le long de chacune de ces coupures la fonction $\Phi(z)$ admettra un certain multiplicateur:

$$\begin{array}{l} \text{le long de } a_k, \text{ le multiplicateur } m_k, \\ \text{le long de } b_k, \text{ le multiplicateur } n_k. \end{array} \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

Cela veut dire que, en appelant λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a:

$$\begin{array}{ll} \text{le long de } a_k, & \Phi(\lambda) = m_k \Phi(\rho), \\ \text{le long de } b_k, & \Phi(\lambda) = n_k \Phi(\rho). \end{array} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

Il y a ainsi en tout $2p$ multiplicateurs

$$m_1, m_2, \ldots, m_p; \; n_1, n_2, \ldots, n_p.$$

Le problème que nous avons maintenant à résoudre est celui-ci:

Former toutes les fonctions à multiplicateurs m_k, n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *donnés d'avance.*

Pour cela, désignons avec Neumann par

$$w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à la relation algébrique $F(s, z) = 0$, et appelons (loc. cit. page 246)

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}; \; b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ip}$$

les modules de périodicité de l'intégrale w_i le long des coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Nous aurons alors le tableau suivant pour les modules de périodicité

Coupures	$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$	$b_1, \quad b_2, \ldots, b_p$
w_1	$a_{11} = \pi i, \quad a_{12} = 0, \ldots, a_{1p} = 0$	$b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1p}$
w_2	$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \pi i, \ldots, a_{2p} = 0$	$b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2p}$
.	. . . .	. . . .
w_p	$a_{p1} = 0, \quad a_{p2} = 0, \ldots, a_{pp} = \pi i$	$b_{p1}, b_{p2}, \ldots, b_{pp}$

avec

$$b_{kj} = b_{jk}.$$

Les intégrales normales que Briot désigne, dans sa *Théorie des fonctions abéliennes,* par

$$u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$$

sont respectivement égales à

$$2w_1, 2w_2, \ldots, 2w_p.$$

En continuant à suivre les notations de M. C. Neumann (loc. cit. page 271) désignons par

$$\varpi_{\alpha\beta}(z)$$

l'intégrale abélienne normale de *troisième espèce* qui devient infinie aux deux points α et β comme

$$\log(z - \beta) - \log(z - \alpha).$$

Les modules de périodicité de cette intégrale sont

le long de a_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 0$,

le long de b_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 2[w_k(\beta) - w_k(\alpha)]$.

Donc la fonction

$$\Phi_{\alpha\beta}(z) = e^{\varpi_{\alpha\beta}(z)}$$

est régulière sur la surface R_{ab}: elle possède sur cette surface un pôle du

premier ordre α et un zéro du premier ordre β; de plus elle vérifie les relations suivantes

$$\text{le long de la coupure } a_k: \quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \Phi_{\alpha\beta}(\rho),$$

$$\text{le long de la coupure } b_k: \quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = e^{2[w_k(\beta) - w_k(\alpha)]} \Phi_{\alpha\beta}(\rho).$$

Cela posé, désignons par $\Phi(z)$ une fonction régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admettant le long des coupures a_k, b_k des multiplicateurs donnés m_k, n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. La dérivée logarithmique de cette fonction

$$\frac{d \log \Phi(z)}{dz}$$

est une fonction de z uniforme et régulière sur la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z; cette fonction admet pour pôles du premier ordre les zéros et les infinis de $\Phi(z)$, les premiers avec les résidus $+1$, les seconds avec les résidus -1; cette fonction peut d'ailleurs avoir d'autres pôles placés aux points de ramification, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$\int d \log \Phi(z)$$

est finie en tous les points distincts des zéros et des infinis de $\Phi(z)$. Cette intégrale est donc une intégrale abélienne n'ayant que des infinis logarithmiques: en la décomposant en intégrales normales de première et troisième espèce, on la mettra sous la forme

$$\begin{aligned}\int d \log \Phi(z) = \varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z) \\ - 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)],\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. On tire de là en intégrant

$$(1) \qquad \Phi(z) = C e^{\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z) - 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

C étant une constante. Cette fonction $\Phi(z)$ admet q infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et q zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Il reste à exprimer que cette fonction $\Phi(z)$ admet les *multiplicateurs donnés* m_k et n_k. D'après les expressions précédemment rappelées des modules de périodicité des intégrales abéliennes de première et troisième espèce (page 11), on a:

le long de la coupure a_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{-2\lambda_k \pi i},$$

et le long de la coupure b_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{\sum\limits_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})}.$$

En écrivant que le long de a_k le multiplicateur est m_k et que le long de b_k il est n_k, on aura

$$(2) \qquad e^{-2\lambda_k \pi i} = m_k, \qquad \lambda_k = -\frac{1}{2\pi i} \log m_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

puis

$$e^{\sum\limits_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})} = n_k,$$

d'où l'on tire en prenant les logarithmes des deux membres et remplaçant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ par les valeurs (2) $-\frac{1}{2\pi i}\log m_1$, $-\frac{1}{2\pi i}\log m_2, \ldots$

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q} [w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

On a ainsi le théorème suivant:

Toute fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k, n_k admet autant d'infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que de zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$; ces zéros et ces infinis sont liés par les p relations (3) *et la fonction elle-même est donnée par l'expression*

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde\omega_{\alpha_1\beta_1}(z) + \tilde\omega_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \tilde\omega_{\alpha_q\beta_q}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]},$$

les logarithmes ayant les mêmes déterminations que dans les équations (3).

Réciproquement, étant marqués sur la surface R de Riemann deux systèmes de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ qui vérifient les p relations (3), *il existe une fonction $\Phi(z)$ régulière sur R_{ab}, devenant infinie aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, nulle aux points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ et admettant les multiplicateurs m_k et n_k; cette fonction est donnée par l'expression* (4).

Les relations (3) constituent, pour les fonctions à multiplicateurs, un théorème analogue au théorème d'Abel pour les fonctions algébriques rationnelles en s et z. On obtient le théorème d'Abel en supposant que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité.

Remarque. Le quotient de deux fonctions aux mêmes multiplicateurs est évidemment une fonction uniforme et régulière sur toute la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z. On en conclut que:

Si $\Phi(z)$ est une fonction déterminée aux multiplicateurs m_k et n_k, l'expression générale de toutes les fonctions aux mêmes multiplicateurs est

$$\Phi(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z.

Cas spécial. Supposons que les multiplicateurs m_k et n_k puissent être identifiés avec les multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignent des constantes: en d'autres termes, supposons qu'il existe p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ telles que l'on ait

$$(5) \qquad m_k = e^{-2\lambda_k \pi i}, \qquad n_k = e^{-2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}]}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

Alors l'exponentielle $E(z)$ est une fonction *partout finie* possédant les multiplicateurs m_k et n_k; toute autre fonction régulière possédant les mêmes multiplicateurs sera égale au produit de cette exponentielle par une fonction rationnelle de s et z.

Ce cas spécial se présentera lorsque les multiplicateurs m_k et n_k vérifieront les p relations que nous allons former en éliminant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$

entre les équations (5). Désignons par $N_1, N_2, \ldots, N_p$ des nombres entiers: nous aurons

$$\log m_k = -2\lambda_k \pi i - 2N_k \pi i;$$

puis, si nous désignons par $M_1, M_2, \ldots, M_p$ des nombres entiers, nous aurons de même

$$\log n_k = 2M_k \pi i - 2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}].$$

L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ donne donc

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$
$$= M_k \pi i + N_1 b_{1k} + N_2 b_{2k} + \ldots + N_p b_{pk}$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Telles sont les p relations, entre les multiplicateurs, qui caractérisent le cas spécial dont nous nous occupons. Dans ce cas, les relations (3) entre les zéros et les infinis d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, se réduisent aux relations bien connues entre les zéros et les infinis d'une fonction algébrique rationnelle en s et z. (Voyez C. Neumann, loc. cit. page 275.)

Si l'on suppose le genre p égal à l'unité, on retrouve les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une forme spéciale, qui ont été signalées par M. Mittag-Leffler. (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, Tome 90, page 177.)

En revenant maintenant au cas général où les multiplicateurs m_k et n_k sont quelconques, nous allons démontrer quelques propriétés fondamentales des fonctions à multiplicateurs.

Nous avons vu précédemment que les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k sont liés par les p relations (voyez page 13)

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Si q est supérieur ou égal à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $(q-p)$ des zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q$ peuvent être choisis arbitrairement; les p autres zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ sont déterminés par les équations ci-dessus (3).

La fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k avec ces zéros et ces infinis est donnée par la formule (4)

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{\alpha_1\beta_1}(z)+\tilde{\omega}_{\alpha_2\beta_2}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\alpha_q\beta_q}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]};$$

elle contient donc $(2q-p+1)$ *constantes arbitraires* à savoir

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q; \; \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q; \; C.$$

On trouve ainsi l'extension, aux fonctions à multiplicateurs, de théorèmes bien connus de la théorie des fonctions algébriques (voyez C. Neumann, loc. cit. pages 258 à 265).

Examinons d'abord les cas particuliers de $q = p$ et $q = p + 1$.

Si q est égal à p, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$: alors les zéros sont déterminés, et la constante C seule reste en outre arbitraire. Une fonction aux multiplicateurs donnés devenant infinie seulement en p points est donc déterminée, à un facteur constant près, par la connaissance de ces p infinis.

Si q est égal à $p+1$, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ et un zéro β_{p+1}: alors les autres zéros sont déterminés, et il reste à prendre arbitrairement la constante C. Une fonction aux multiplicateurs donnés, devenant infinie seulement en $(p+1)$ points donnés, contient encore deux constantes arbitraires β_{p+1} et C. Il existe *deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ linéairement indépendantes* admettant les multiplicateurs donnés et les $(p+1)$ infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; *toute autre fonction $\Phi(z)$ ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$*

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z),$$

où μ_1 et μ_2 désignent des constantes. En effet, supposons que la fonction $\Phi_1(z)$ soit obtenue en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une certaine posi-

tion et la fonction $\Phi_2(z)$ en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une autre position ne coïncidant avec aucun des zéros de $\Phi_1(z)$. Ces deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont linéairement indépendantes puisqu'elles n'ont pas les mêmes zéros. L'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

admet, quelles que soient les constantes μ_1 et μ_2, les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; on pourra toujours disposer du rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ de façon que cette expression admette un des zéros d'une fonction quelconque $\Phi(z)$ aux mêmes multiplicateurs et aux mêmes infinis. Le rapport des constantes μ_1 et μ_2 étant ainsi déterminée, l'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

aura les mêmes zéros que $\Phi(z)$, puisque les $(p + 1)$ zéros sont déterminés dès que l'un d'eux l'est. Cette expression ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $\Phi(z)$ n'en diffère que par un facteur constant, pouvant être supposé égal à l'unité, puisque jusqu'à présent le rapport de μ_1 à μ_2 est seul déterminé. On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

pour l'expression générale d'une fonction admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k et les $(p + 1)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$.

D'une manière générale, si l'on suppose

$$q = p + r,$$

il existe $(r + 1)$ fonctions linéairement indépendantes

$$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{r+1}(z)$$

admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$. Toute autre fonction $\Phi(z)$ ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est de la forme

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r+1}$ *désignant des constantes.*

Ce théorème général se démontre comme le cas particulier ($r = 1$) que nous venons de traiter d'une façon détaillée. On peut aussi le rattacher à un théorème connu relatif aux fonctions algébriques rationnelles en s et z.

Soit, en effet, $\varphi(z)$ une fonction *déterminée* ayant les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$; soit, comme ci-dessus, $\Phi(z)$ la fonction la plus générale admettant ces mêmes multiplicateurs et ces mêmes infinis. Le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}$$

est une fonction algébrique rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis à savoir les zéros de $\varphi(z)$. Or on sait que la fonction la plus générale rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis donnés est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z et admettant ces mêmes infinis, en convenant de compter parmi ces fonctions particulières une constante comme admettant les infinis donnés et des zéros identiques aux infinis. Nous pouvons toujours appeler

$$\frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)}, \quad \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)}$$

ces $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z, et nous avons la formule

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)} = \mu_1 \frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)} + \mu_2 \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)} + \ldots + \mu_{r+1} \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)},$$

qui, après suppression du dénominateur $\varphi(z)$, donne la relation à démontrer.

La formule

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z)$$

que nous venons d'établir, contient comme cas particulier la formule de décomposition en éléments simples indiquée par M. Appell (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 8, § 5). Nous ne reproduirons pas ici cette formule qui, tout en étant intéressante, est encore imparfaite, car l'élément simple de M. Appell devient infini,

non pas en un seul point, mais en p points dont $(p-1)$ sont étrangers à la question. Nous donnons dans la deuxième partie une formule beaucoup plus satisfaisante destinée à remplacer celle de M. Appell.

Les théorèmes que nous venons d'établir sont (comme les théorèmes analogues sur les fonctions algébriques) sujets à des exceptions, quand les $(p+r)$ infinis donnés sont des groupes particuliers de points. Il arrive alors qu'il existe *plus* de $(r+1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés. En effet, le raisonnement qui sert à établir ces théorèmes repose sur ce fait que, les $(p+r)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$ étant donnés, on peut choisir *arbitrairement* r zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{p+r}$ et *déterminer* les p zéros restants à l'aide des équations

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p], \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

ce qui conduit à la résolution du problème d'inversion de Jacobi. Mais il est bien connu que les équations d'inversion présentent une indétermination dans certains cas (voyez Briot, *Fonctions abéliennes*, p. 96); dans ces cas d'indétermination un zéro de plus peut être choisi arbitrairement et il existe plus de $(r+1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les multiplicateurs et les infinis donnés. Quand, par la suite, nous appliquerons les théorèmes précédents, nous devrons vérifier chaque fois que ce cas d'indétermination ne se présente pas.

Nous venons d'examiner ce qui se passe quand le nombre des infinis simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est supérieur ou égal à p. Si ce nombre q *est inférieur* à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne peuvent plus être pris arbitrairement, ainsi qu'il résulte des p relations (3) rappelées plus haut. Une fonction admettant les multiplicateurs donnés ne pourra alors devenir infinie *qu'en des groupes particuliers* de q points. Nous laissons de côté l'étude de ce cas $(q < p)$ et la recherche de ces groupes particuliers de q points. Cette question est d'ailleurs entièrement semblable à celle que M. Weierstrass traite dans son cours à propos du problème analogue relatif aux fonctions algébriques.

Dans le cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \dots + \lambda_p w_p(z)]},$$

si l'on cherche une fonction admettant ces multiplicateurs et devenant infinie en p points arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, on trouve que les zéros $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ de cette fonction sont confondus avec ses infinis et que cette fonction se réduit à l'exponentielle $E(z)$ qui n'a ni zéros ni infinis. Une fonction admettant ces multiplicateurs spéciaux et devenant effectivement infinie en p points ne peut exister que si ces points sont choisis d'une façon particulière. Nous n'insistons pas sur ces théorèmes qui se ramènent immédiatement aux théorèmes analogues relatif aux fonctions algébriques, puisque toute fonction admettant les multiplicateurs de $E(z)$ est égale au produit de cette exponentielle $E(z)$ par une fonction algébrique rationnelle en s et z.

M. Appell a montré que, dans le cas où les multiplicateurs sont quelconques, les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs sont liés par $(p - 1)$ relations: et que, dans le cas où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle comme $E(z)$, les pôles et les résidus sont liés par p relations (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 22, § 11). Nous dirons un mot de ces relations à propos des intégrales de première espèce.

Deuxième partie.

Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

Soit $\Phi(z)$ une fonction uniforme et régulière sur la surface R_{ab} de Riemann, admettant le long des coupures a_k et b_k les multiplicateurs respectifs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. L'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z) dz$$

possède des propriétés intéressantes qui la rapprochent des intégrales abéliennes.

Tout d'abord, nous pourrons étendre à ces intégrales la classification des intégrales abéliennes. Nous dirons d'une intégrale de fonction à multiplicateurs:

qu'elle est de *première espèce,* si elle est *partout finie,*

qu'elle est de *deuxième espèce,* si elle n'a que des *infinis algébriques,*

qu'elle est de *troisième espèce,* si elle a des *infinis logarithmiques.*

Intégrales de première espèce.

Pour que l'intégrale

$$\int \Phi(z) dz$$

soit de première espèce, il faut et il suffit: (en supposant comme d'habitude que l'infini n'est pas un point de ramification)

1° que la fonction $\Phi(z)$ devienne à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$,

2° que les infinis de $\Phi(z)$ coïncident avec des points de ramification et que, dans le voisinage d'un de ces points $z = \zeta$, la fonction Φ devienne infinie comme une puissance de $\frac{1}{z-\zeta}$, inférieure à l'unité.

En désignant par $w(z)$ une intégrale *abélienne* de première espèce et par $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale, on voit que les conditions précédentes reviennent à celle-ci:

Le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ est fini à l'infini et aux points de ramification; il ne devient infini qu'aux zéros de $w'(z)$ situés à distance finie.

Nous allons, d'après cela, former l'expression de ce rapport qui est évidemment, comme son numérateur $\Phi(z)$, une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k.

On sait que la fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

dont $(p-1)$ sont arbitraires; ces points sont liés par les relations suivantes bien connues

$$w_k(\gamma_1) + w_k(\gamma_2) + \ldots + w_k(\gamma_{2p-2}) \equiv G_k \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{7}$$

les lettres $G_1, G_2, \ldots, G_p$ désignant des constantes et le signe $\equiv$ indiquant que l'égalité a lieu à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 147 et 149, où ces constantes sont désignées par K_k et $2C_k$.)

Pour former le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, il faut donc former la fonction la plus générale régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k, n_k et devenant infinie aux $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

Cette fonction admettra aussi $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et sera donnée par l'expression

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_2\beta_2}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]},$$

les zéros et les infinis étant liés par les p relations

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2}[w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$

$$-\frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

En vertu des relations (7) de la page précédente qui lient les infinis $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$\sum_{1}^{2p-2} w_k(\beta_j) \tag{8}$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations montrent que, sur les $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, on peut en prendre $(p-2)$ *arbitrairement*, par exemple $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$; les p zéros restants

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

seront déterminés par les équations (8) au nombre de p. La fonction la plus générale $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ contiendra donc dans son expression $(p-1)$ constantes arbitraires, à savoir les $(p-2)$ zéros arbitraires $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$ et le facteur constant C. Comme nous l'avons fait remarquer à la page 19, il faut s'assurer que les relations (8) déterminent effectivement p des

zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ dès qu'on connaît les $(p-2)$ autres $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Pour cela écrivons ces relations sous la forme

$$\sum_1^p w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] - \sum_{j=p+1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j);$$

$$(k=1, 2, \ldots, p)$$

or, l'on sait que des équations de cette forme déterminent $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta$ *excepté dans le cas spécial où les quantités*

$$\frac{1}{2}\log n_k - [b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

seraient nulles à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, § 56.) *Ecartons pour le moment ce cas spécial* qui a été examiné aux pages 14 et 15 de ce mémoire et dans lequel les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme $E(z)$; alors, ce cas étant écarté, on peut choisir arbitrairement $(p-2)$ zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$ et déterminer les p zéros restants à l'aide des équations (8) de la page précédente. En donnant aux $(p-2)$ zéros arbitraires différentes positions, on obtient une infinité de fonctions ayant les infinis et les multiplicateurs donnés. Soient

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_{p-1}(z)$$

$(p-1)$ de ces fonctions supposées *linéairement indépendantes:* l'expression la plus générale de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ ayant les mêmes infinis et les mêmes multiplicateurs sera

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = \mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z),$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignent des constantes arbitraires. En effet, cette fonction

$$\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)$$

possède les infinis et les multiplicateurs donnés et l'on pourra disposer des constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ de façon qu'elle s'annule en $(p-2)$ points

donnés. Il est d'ailleurs évident qu'il existe au moins $(p - 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés, puisque $(p - 2)$ zéros peuvent être pris arbitrairement. (Voyez à ce sujet les théorèmes des pages 16 et 17.)

En résumé:

Pour que l'intégrale $\int \Phi(z)dz$ reste finie il faut et il suffit que la fonction $\Phi(z)$ soit de la forme

$$\Phi(z) = w'(z)[\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)]$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ étant des constantes arbitraires.

Théorème. *En dehors du cas spécial où les multiplicateurs m_k, n_k sont ceux d'une exponentielle $E(z)$* (page 14), *il existe $(p - 1)$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes*

$$\omega_1(z) = \int w'(z)\varphi_1(z)dz, \qquad \omega_2(z) = \int w'(z)\varphi_2(z)dz,$$
$$\ldots, \quad \omega_{p-1}(z) = \int w'(z)\varphi_{p-1}(z)dz;$$

toute autre intégrale de première espèce $\omega(z)$ est de la forme

$$\omega(z) = \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ étant des constantes.

Cas spécial. Plaçons-nous maintenant dans le cas spécial examiné précédemment (page 14) où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. Alors toute fonction, régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant ces multiplicateurs spéciaux, est de la forme

$$E(z)R(s, z)$$

où $R(s, z)$ désigne une fonction algébrique rationnelle en s et z. Pour

obtenir les intégrales de première espèce, il faudra déterminer cette fonction $R(s, z)$ de façon que l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

soit partout finie. Comme l'exponentielle $E(z)$ n'a ni zéros ni infinis, pour que l'intégrale ci-dessus soit finie, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int R(s, z) dz$$

le soit, c'est à dire que cette dernière intégrale soit une intégrale abélienne de première espèce

$$\int R(s, z) dz = \mu_1 w_1(z) + \mu_2 w_2(z) + \ldots + \mu_p w_p(z) + C^{te};$$

d'où en différentiant et appelant $w_k'(z)$ la dérivée de $w_k(z)$

$$R(s, z) = \mu_1 w_1'(z) + \mu_2 w_2'(z) + \ldots + \mu_p w_p'(z).$$

Si l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

est de première espèce, elle est donc de la forme

$$\mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

à condition de poser

$$\omega_1(z) = \int E(z) w_1'(z) dz, \qquad \omega_2(z) = \int E(z) w_2'(z) dz,$$

$$\ldots, \quad \omega_p(z) = \int E(z) w_p'(z) dz.$$

Dans ce cas spécial il y a donc p intégrales de première espèce linéairement indépendantes et non $(p - 1)$ comme dans le cas général.

Mais, dans ce cas spécial, *il y a entre ces p intégrales de première espèce une relation* fort simple qui permet d'exprimer l'une d'entre elles au moyen des $(p - 1)$ autres et de l'exponentielle $E(z)$. En effet, en différentiant l'équation

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

on a

$$dE(z) = -2E(z)[\lambda_1 w_1'(z) + \lambda_2 w_2'(z) + \ldots + \lambda_p w_p'(z)]dz;$$

d'où, en intégrant,

$$E(z) = -2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \ldots + \lambda_p \omega_p(z)] + C^{te}; \tag{9}$$

ce qui est la relation annoncée.

Relations entre les pôles et les résidus d'une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k et n_k.

Soit une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k admettant les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que nous supposons, pour simplifier, *du premier ordre, distincts des points de ramification* et *situés à distance finie:* appelons $R_1, R_2, \ldots, R_q$ les résidus relatifs à ces pôles. Construisons par la méthode que nous venons d'indiquer, une fonction $\Omega'(z)$ ayant les multiplicateurs *inverses* de m_k, n_k, c'est à dire admettant le long de la coupure a_k le multiplicateur $\frac{1}{m_k}$ et le long de la coupure b_k le multiplicateur $\frac{1}{n_k}$; formons en outre cette fonction $\Omega'(z)$ de telle façon que l'intégrale

$$\Omega(z) = \int \Omega'(z)dz$$

soit finie partout, c'est à dire soit de *première espèce.* Cette fonction $\Omega'(z)$ devient alors à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; elle devient infinie aux points de ramification, mais de telle façon que son intégrale reste finie. Dans ces conditions le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

est une fonction régulière et uniforme sur la surface R de Riemann, par suite une fonction algébrique rationnelle en s et z; en effet le long d'une coupure, a_k par exemple, on a, en appelant comme toujours λ un point du bord gauche de la coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit:

$$\Phi(\lambda) = m_k\Phi(\rho), \qquad \Omega'(\lambda) = \frac{1}{m_k}\Omega'(\rho),$$

d'où l'on conclut

$$\Phi(\lambda)\Omega'(\lambda) = \Phi(\rho)\Omega'(\rho).$$

On pourra donc supprimer la coupure a_k sans que le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

cesse d'être uniforme; on pourra répéter la même chose pour la coupure b_k. Donc ce produit est uniforme sur la surface primitive R de Riemann; il est une *fonction rationnelle* de s et z. Cette fonction rationnelle de s et z devenant à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$, la somme de ses résidus est *nulle* d'après un théorème bien connu. Or les pôles de ce produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

sont:

1° les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ du premier facteur $\Phi(z)$; en ces pôles le produit a pour résidus respectifs $R_1\Omega'(\alpha_1), R_2\Omega'(\alpha_2), \ldots, R_q\Omega'(\alpha_q)$;

2° les pôles du second facteur $\Omega'(z)$ qui sont tous situés aux points de ramification; en ces pôles tout les résidus sont *nuls* puisque l'intégrale $\Omega(z)$ est partout finie.

La somme des résidus du produit devant être *nulle*, on a la relation

$$(10) \qquad R_1\Omega'(\alpha_1) + R_2\Omega'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega'(\alpha_q) = 0.$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas de la forme spéciale (page 14) qui permet de les identifier avec ceux d'une exponentielle $E(z)$, leurs inverses ne sont pas non plus de cette forme spéciale. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants arbitraires de $(p-1)$ fonctions particulières $\Omega'_1(z), \Omega'_2(z), \ldots, \Omega'_{p-1}(z)$, et l'on a

$$\Omega'(z) = \mu_1\Omega'_1(z) + \mu_2\Omega'_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\Omega'_{p-1}(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignant des constantes arbitraires. La relation (10) donne donc, entre les pôles et les résidus, $(p-1)$ relations distinctes

$$\begin{aligned}
&R_1\Omega'_1(\alpha_1) \;\; + R_2\Omega'_1(\alpha_2) \;\; + \ldots + R_q\Omega'_1(\alpha_q) \;\; = 0,\\
&R_1\Omega'_2(\alpha_1) \;\; + R_2\Omega'_2(\alpha_2) \;\; + \ldots + R_q\Omega'_2(\alpha_q) \;\; = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_1\Omega'_{p-1}(\alpha_1) + R_2\Omega'_{p-1}(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega'_{p-1}(\alpha_q) = 0.
\end{aligned}$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k de $\Phi(z)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

les multiplicateurs inverses $\frac{1}{m_k}$ et $\frac{1}{n_k}$ sont ceux d'une exponentielle $\frac{1}{E(z)}$ de la même forme. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants de p fonctions particulières

$$\Omega'(z) = \mu_1 \Omega'_1(z) + \mu_2 \Omega'_2(z) + \ldots + \mu_p \Omega'_p(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ étant des constantes arbitraires. La relation (10) se décompose donc, dans ce cas, en p relations distinctes que l'on peut écrire

$$R_1 \Omega'_k(\alpha_1) + R_2 \Omega'_k(\alpha_2) + \ldots + R_q \Omega'_k(\alpha_q) = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Dans ce cas spécial, on pourrait aussi obtenir ces p relations en remarquant que le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{E(z)}$$

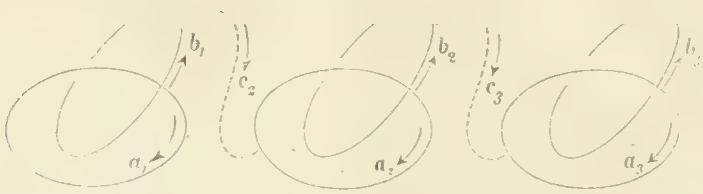
est une fonction algébrique et écrivant les p relations bien connues qui lient les pôles et les résidus d'une fonction algébrique.

Nous n'examinerons pas ici comment il faut modifier ces relations quand certains pôles deviennent multiples ou viennent coïncider avec des points de ramification. Ces modifications sont les mêmes que dans les questions analogues relatives aux fonctions algébriques. (Voyez le Mémoire de M. Appell, *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique*, Acta mathematica, Tome 1, et une Note de M. Goursat, *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 97, page 1281.)

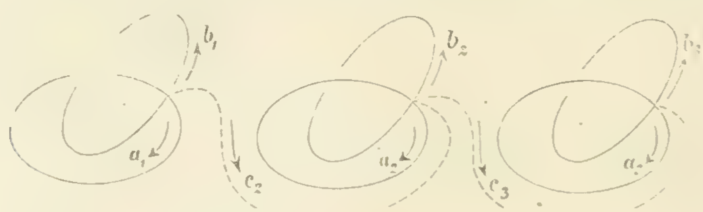
Pour avoir un exemple très particulier des théorèmes précédents, prenons le cas de $p = 1$. Nous verrons alors qu'il n'y a *aucune relation* entre les résidus d'une fonction doublement périodique *générale* de seconde espèce, mais qu'il y a *une* relation entre les pôles et les résidus d'une fonction doublement périodique de seconde espèce de la forme spéciale $e^{\lambda u} f(u)$, $f(u)$ étant doublement périodique et λ constant.

Modules de périodicité des intégrales de première espèce.

Pour simplifier l'étude des modules de périodicité, nous allons particulariser le système des coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_2, c_3, \ldots, c_p$ de Riemann reproduit par C. Neumann. En nous reportant à la figure schématique donnée par C. Neumann (*Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*, zweite Auflage, Leipzig 1884, page 184), figure que nous reproduisons ci-dessous,



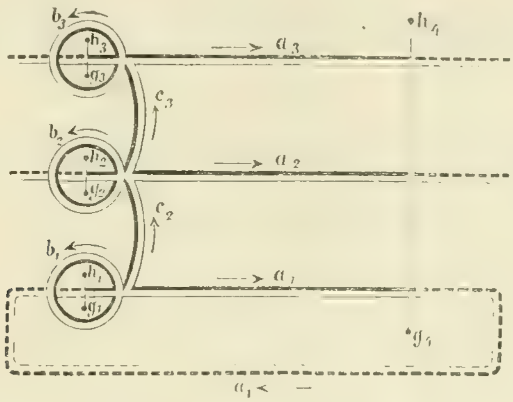
nous voyons que nous pouvons faire partir la coupure c_2 d'un point quelconque de b_1 pour la faire aboutir en un point quelconque de a_2; nous conviendrons, dans tout ce qui suit, de faire partir la coupure c_2 du point de croisement des coupures b_1 et a_1 pour la faire aboutir au point de croisement de b_2 et a_2; puis nous ferons partir la coupure c_3 de ce dernier point pour la faire aboutir au point de croisement de b_3 et a_3; et ainsi de suite, comme le montre cette nouvelle figure



Pour achever de préciser la disposition que nous adoptons pour les coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, reprenons l'exemple traité par C. Neumann (loc. cit. page 178) dans lequel l'équation entre s et z est

$$s^2 = (z - g_1)(z - h_1)(z - g_2)(z - h_2)(z - g_3)(z - h_3)(z - g_4)(z - h_4).$$

L'on modifiera alors la figure donnée par NEUMANN (loc. cit. page 179) comme il est indiqué ci-dessous:



Pour ne pas surcharger la figure, nous n'avons pas tracé en entier les coupures a_2 et a_3 sur le feuillet inférieur de la surface; nous avons, comme NEUMANN, marqué d'un trait plus épais le bord gauche des coupures et ponctué les coupures situées sur le feuillet inférieur.

Cela posé, soit

$$\omega(z) = \int \omega'(z)\,dz$$

une intégrale de première espèce formée comme nous l'avons vu plus haut, la fonction $\omega'(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k. Comme cette fonction $\omega'(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_p,$$

$$c_2, \ldots, c_p,$$

et comme les résidus de cette fonction sont tous nuls, *l'intégrale* $\omega(z)$ *est aussi uniforme sur la surface de Riemann* R_{abc} *et d'après sa formation même elle reste finie partout.*

Considérons la coupure a_k et appelons λ un point situé sur le bord gauche de cette coupure, ρ le point situé en face de λ sur le bord droit.

La fonction $\omega'(z)$ admettant le long de cette coupure a_k le multiplicateur m_k, on a

$$\omega'(\lambda) = m_k \omega'(\rho).$$

Pour un déplacement effectué le long de la coupure on a

$$d\lambda = d\rho,$$

puisque les points λ et ρ sont en face l'un de l'autre. On a donc aussi

$$\omega'(\lambda) d\lambda - m_k \omega'(\rho) d\rho = 0$$

et, en intégrant, on a tout le long de la coupure,

$$\omega(\lambda) - m_k \omega(\rho) = A_k,$$

la lettre A_k désignant une *constante*. Nous appellerons cette constante le *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure a_k.

De même, les deux valeurs de l'intégrale $\omega(z$ en deux points λ et ρ, situés en face l'un de l'autre sur les bords gauche et droit de la coupure b_k, sont liées par la relation

$$\omega(\lambda) - n_k \omega(\rho) = B_k,$$

où B_k désigne une *constante* que nous appellerons *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure b_k.

Enfin, sur les deux bords d'une coupure c_h, on a comme nous l'avons vu à la page 9 pour toute fonction à multiplicateurs

$$\omega'(\lambda) = \omega'(\rho), \qquad \omega'(\lambda) d\lambda - \omega'(\rho) d\rho = 0,$$

d'où

$$\omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h,$$

C_h étant constant tout le long de la coupure c_h. Cette constante C_h sera appelée *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure c_h.

Donc:

L'intégrale de première espèce $\omega(z)$ possède $(3p - 1)$ modules de périodicité, à savoir les modules

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ le long des coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p$,
$B_1, B_2, \ldots, B_p$ le long des coupures $b_1, b_2, \ldots, b_p$,
$C_2, \ldots, C_p$ le long des coupures $c_2, \ldots, c_p$;

c'est à dire que l'on a

$$\text{le long de } a_k: \quad \omega(\lambda) - m_k\omega(\rho) = A_k, \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

$$\text{le long de } b_k: \quad \omega(\lambda) - n_k\omega(\rho) = B_k, \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

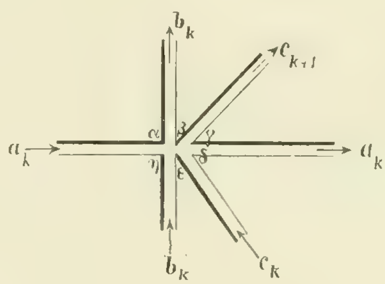
$$\text{le long de } c_h: \quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h. \qquad (h=2,3,\dots,p)$$

Mais ces $(3p-1)$ modules de périodicité sont liés par p relations linéaires et homogènes permettant d'exprimer p d'entre eux à l'aide des $(2p-1)$ autres. Voici comment on obtient ces relations.

Figurons le point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et appelons

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta,$$

les sommets des six angles formés par les bords de ces coupures, comme le montre la figure suivante:



Nous aurons, d'après la définition des modules de périodicité, et puisque l'épaisseur des coupures est infiniment petite, les relations suivantes

$$\omega(\alpha) - n_k\omega(\beta) = B_k,$$

$$\omega(\beta) - \omega(\gamma) = C_{k+1},$$

$$\omega(\gamma) - m_k\omega(\delta) = A_k,$$

$$\omega(\varepsilon) - \omega(\delta) = C_k,$$

$$\omega(\eta) - n_k\omega(\varepsilon) = B_k,$$

$$\omega(\alpha) - m_k\omega(\eta) = A_k.$$

Multiplions ces équations respectivement par $+1$, n_k, n_k, $-m_kn_k$, $-m_k$,

— 1, puis ajoutons-les membre à membre. La somme des premiers membres est nulle et l'on obtient la relation

$$(11)\qquad B_k(1-m_k)-A_k(1-n_k)-m_k n_k C_k+n_k C_{k+1}=0.$$

En supposant, successivement, $k=1, 2, \ldots, p$, on aura ainsi p relations. Comme il n'existe ni coupure c_1 ni coupure c_{p+1}, il faudra dans ces relations considérer les constantes C_1 et C_{p+1} comme étant *nulles*. En écrivant ces p relations en détail, nous aurons

$$(12)\quad \left|\begin{array}{l} B_1(1-m_1)-A_1(1-n_1) \qquad\qquad +n_1C_2=0, \\ B_2(1-m_2)-A_2(1-n_2)-m_2n_2C_2+n_2C_3=0, \\ B_3(1-m_3)-A_3(1-n_3)-m_3n_3C_3+n_3C_4=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{p-1}(1-m_{p-1})-A_{p-1}(1-n_{p-1})-m_{p-1}n_{p-1}C_{p-1}+n_{p-1}C_p=0, \\ B_p(1-m_p)-A_p(1-n_p)-m_pn_pC_p=0. \end{array}\right.$$

Ces relations permettent d'exprimer $C_2, C_3, \ldots, C_p$ en fonction des modules de périodicité A_k, B_k et des multiplicateurs m_k, n_k. Dans le cas particulier où tous ces multiplicateurs m_k, n_k seraient égaux à *l'unité*, l'intégrale $\omega(z)$ deviendrait une *intégrale abélienne* de première espèce, et les relations ci-dessus montreraient que les constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ seraient toutes *nulles* dans ce cas.

En éliminant les $(p-1)$ constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ entre les p relations (12), on obtiendra une relation entre les modules de périodicité $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$. Pour cela, multiplions la première des équations (12) par $\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{n_1}$, la seconde par $\frac{1}{m_1m_2}\cdot\frac{1}{n_2}$, la troisième par $\frac{1}{m_1m_2m_3}\cdot\frac{1}{n_3}$, ... la $k^{\text{ième}}$ par $\frac{1}{m_1m_2\ldots m_k}\cdot\frac{1}{n_k}$, ..., et ajoutons-les: nous obtiendrons l'équation

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}\frac{B_k(1-m_k)-A_k(1-n_k)}{m_1m_2\ldots m_k}\cdot\frac{1}{n_k}=0.$$

équation qui est une identité dans le cas particulier des intégrales abéliennes, puisque dans ce cas tous les multiplicateurs sont égaux à l'unité.

L'intégrale

$$\omega(z) = \int \omega'(z)\,dz$$

prise sur tout le contour de la surface de Riemann R_{abc} est évidemment *nulle.* Or la valeur de cette intégrale est facile à calculer en fonction des modules de périodicité et des multiplicateurs. Si l'on égale cette valeur à zéro, on obtient une relation qui n'est pas nouvelle mais qui est une conséquence des relations précédentes (12).

Cas spécial. Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

il existe, comme nous l'avons vu, p intégrales de première espèce

$$\omega_k(z) = \int E(z)\, w'_k(z)\,dz. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Une quelconque d'entre elles, $\omega(z)$, aura $(3p - 1)$ modules de périodicité liés par les relations que nous venons d'indiquer. Les modules de périodicité de l'intégrale $\lambda_p \omega_p(z)$ sont égaux et de signes contraires aux sommes des modules de périodicité correspondants des $(p - 1)$ autres intégrales $\lambda_1 \omega_1(z), \lambda_2 \omega_2(z), \ldots, \lambda_{p-1} \omega_{p-1}(z)$. C'est ce qui résulte immédiatement de l'identité (p. 27)

$$(9) \qquad 2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \ldots + \lambda_p \omega_p(z)] = -E(z) + C^{te}$$

dans laquelle les modules de périodicité du second membre sont tous *nuls.*

Relation entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce aux multiplicateurs inverses.

La relation que nous allons établir est l'extension, à nos intégrales, de la célèbre relation qui lie les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Nous la démontrerons en suivant la méthode que Riemann a donnée pour les intégrales abéliennes.

Soit, comme précédemment, $\omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m_k, n_k, et soient

$$A_k, B_k, C_h \qquad \binom{k=1, 2, \ldots, p}{h=2, 3, \ldots, p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. D'autre part, désignons par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k *inverses* de m_k et n_k:

$$m'_k = \frac{1}{m_k}, \qquad n'_k = \frac{1}{n_k}; \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

et soient

$$A'_k, \ B'_k, \ C'_h \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, p \\ h = 2, 3, \dots, p \end{pmatrix}$$

les modules de périodicité de cette seconde intégrale $\Omega(z)$.

L'intégrale

$$(14) \qquad I = \int \Omega(z) d\omega(z)$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est *nulle*, car la fonction

$$\Omega(z)\omega'(z)$$

est sur cette surface uniforme et régulière et a tous ses résidus nuls.

Pour calculer cette intégrale I, appelons avec C. Neumann, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit. Lorsque la variable d'intégration z parcourt le contour de la surface R_{abc} dans le sens positif, elle parcourt les deux bords d'une même coupure en sens contraire. Les parties de l'intégrale relatives aux deux bords d'une même coupure seront

$$\int [\Omega(\lambda) d\omega(\lambda) - \Omega(\rho) d\omega(\rho)],$$

l'intégration étant faite dans le sens positif le long du bord gauche. L'intégrale I sera donc

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} \left| \int_{a_k} [\Omega(\lambda) d\omega(\lambda) - \Omega(\rho) d\omega(\rho)] + \int_{b_k} [\Omega(\lambda) d\omega(\lambda) - \Omega(\rho) d\omega(\rho)] \right|$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=p} \int_{c_h} [\Omega(\lambda) d\omega(\lambda) - \Omega(\rho) d\omega(\rho)].$$

les indices a_k, b_k, c_h signifiant que les intégrales qui en sont affectées sont prises le long des coupures a_k, b_k, c_h. Or, sur la coupure a_k, on a

$$\Omega(\lambda) = m'_k \Omega(\rho) + A'_k, \qquad \omega(\lambda) = m_k \omega(\rho) + A_k,$$

d'où l'on déduit

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda) + (m_k m'_k - 1)\Omega(\rho)d\omega(\rho);$$

mais, comme les multiplicateurs m_k et m'_k ont été supposés *inverses* l'un de l'autre, on a

$$m_k m'_k - 1 = 0$$

et l'équation ci-dessus prend la forme plus simple

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda)$$

On a de même le long de la coupure b_k

$$\Omega(\lambda) = n'_k \Omega(\rho) + B'_k, \qquad \omega(\lambda) = n_k \omega(\rho) + B_k,$$

d'où l'on déduit, puisque $n_k n'_k - 1 = 0$,

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = B'_k d\omega(\lambda).$$

Enfin le long de la coupure c_h, on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho) + C'_h, \qquad \omega(\lambda) = \omega(\rho) + C_h;$$

d'où l'on déduit

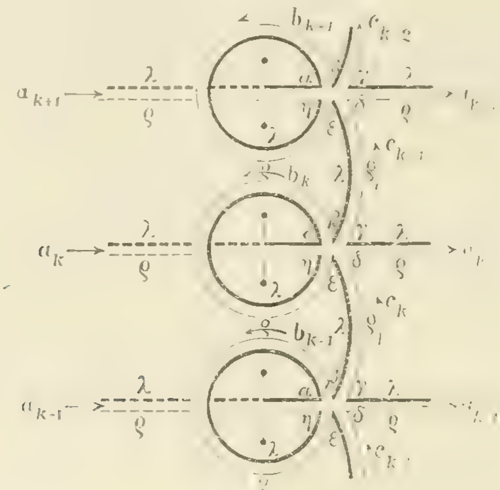
$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = C'_h d\omega(\lambda).$$

D'après cela, l'intégrale I devient

$$(15) \qquad I = \sum_{k=1}^{k=p}\left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda)\right] + \sum_{h=2}^{h=p} C'_h \int_{c_h} d\omega(\lambda).$$

Nous allons transformer cette expression et l'amener à ne contenir que les modules de périodicité des deux intégrales $\Omega(z)$ et $\omega(z)$. Pour faire cette transformation, figurons les coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et les points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k, a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}. Appelons (voyez la figure de la page suivante) α, β, γ, δ, ε, η les sommets des six angles formés par les bords des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} en leur point de croisement; α', β', γ', δ', ε', η' et α'', β'', γ'', δ'', ε'', η'' les sommets

des angles analogues aux points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k et a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}.



Nous aurons

$$\int_{a_k} d\omega(\lambda) = \omega(\alpha) - \omega(\gamma), \qquad \int_{b_k} d\omega(\lambda) = \omega(\eta) - \omega(\alpha),$$

$$\int_{c_k} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon) - \omega(\beta'), \qquad \int_{c_{k+1}} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon'') - \omega(\beta),$$

car toutes ces intégrales sont prises sur les bords gauches des coupures dans le sens indiqué par les flèches. (Les bords gauches sont marqués d'un trait plus gros.)

En calculant ainsi tous les termes de l'intégrale I

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} \left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda) \right] + \sum_{h=2}^{h=p} C'_h \int_{c_h} d\omega(\lambda), \tag{15}$$

on aura l'intégrale I exprimée par une somme de termes où figureront les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ aux sommets des angles tels que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, formés par les bords des coupures en leurs points de croisement. Evaluons, dans cette somme I, les termes qui contiennent les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ situés au point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: nous désignerons ces termes par I_k. L'inté-

grale I sera la somme des quantités analogues à I_k évaluées successivement pour tous les points de croisement des coupures, et l'on aura

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

D'après les intégrales évaluées à la page précédente, les termes de l'intégrale I qui contiennent les valeurs de $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \partial, \varepsilon, \eta$, sont

$$I_k = A'_k[\omega(\alpha) - \omega(\gamma)] + B'_k[\omega(\eta) - \omega(\alpha)] + C'_k\omega(\varepsilon) - C'_{k+1}\omega(\beta).$$

Mais la figure de la page précédente donne d'après la définition même des modules de périodicité

$$\omega(\alpha) = n_k\omega(\beta) + B_k, \qquad \omega(\beta) = \omega(\gamma) + C_{k+1},$$
$$\omega(\alpha) = m_k\omega(\eta) + A_k, \qquad \omega(\eta) = n_k\omega(\varepsilon) + B_k;$$

l'on tire de ces relations, en exprimant

$$\omega(\beta), \omega(\gamma), \omega(\varepsilon), \omega(\eta)$$

en fonction de $\omega(\alpha)$ et faisant comme plus haut

$$\frac{1}{m_k} = m'_k, \qquad \frac{1}{n_k} = n'_k,$$

$$\omega(\beta) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k, \qquad \omega(\gamma) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k - C_{k+1},$$
$$\omega(\eta) = m'_k\omega(\alpha) - m'_kA_k, \qquad \omega(\varepsilon) = m'_kn'_k\omega(\alpha) - n'_k(m'_kA_k + B_k).$$

D'après cela, la quantité I_k devient:

$$I_k = \omega(\alpha)[A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}]$$
$$+ A'_k(n'_kB_k + C_{k+1}) - m'_kB'_kA_k - n'_kC'_k(m'_kA_k + B_k) + n'_kC'_{k+1}B_k.$$

Le coefficient de $\omega(\alpha)$

$$A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}$$

est *nul*, en vertu des relations (12) (page 34) appliquées aux modules

de périodicité de l'intégrale $\Omega(z)$ dont les multiplicateurs sont m'_k et n'_k. Il reste alors

$$I_k = A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C''_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C''_{k+1} B_k.$$

Tels sont, dans l'intégrale I, les termes provenant du point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: l'intégrale I sera, comme nous l'avons déjà dit,

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

Puisque cette intégrale I est *nulle*, on a donc la relation cherchée

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C''_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C''_{k+1} B_k] = 0$$

entre les modules de périodicité A_k, B_k, C_h et A'_k, B'_k, C''_h des deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses. Comme les coupures c_1 et c_{p+1} *n'existent pas*, il faudra, suivant des conventions déjà faites, supposer

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C''_{p+1} = 0.$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, alors leurs inverses m'_k et n'_k deviennent aussi égaux à l'unité, et les deux intégrales $\omega(z)$, $\Omega(z)$ deviennent deux intégrales abéliennes de première espèce. Dans ce cas limite, les constantes C_k et C''_k sont toutes *nulles*, et la relation (16) que nous venons d'établir devient

$$\sum_{k=1}^{k=p} (A'_k B_k - A_k B'_k) = 0,$$

ce qui est la relation bien connue liant les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce.

Remarque. La relation (16) établie plus haut peut être transformée à l'aide des relations (12) de la page (34):

$$\begin{aligned} A_k(1 - n_k) - B_k(1 - m_k) + m_k n_k C_k - n_k C_{k+1} &= 0, \\ A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_k n'_k C'_k - n'_k C''_{k+1} &= 0. \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

C'est en se servant de ces relations que l'on pourrait montrer que la

relation (16) est symétrique par rapport aux deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$, c'est à dire que cette relation ne change pas quand on y remplace A_k, B_k, C_k, m_k, n_k par A'_k, B'_k, C'_k, m'_k, n'_k et inversement.

Supposons, par exemple, les multiplicateurs n_k et n'_k différents de l'unité $(k = 1, 2, \dots, p)$. Alors on pourra écrire les relations que nous venons de rappeler

$$A_k = \frac{n_k C_{k+1} - m_k n_k C_k + B_k(1 - m_k)}{1 - n_k},$$

$$A'_k = \frac{n'_k C'_{k+1} - m'_k n'_k C'_k + B'_k(1 - m'_k)}{1 - n'_k}$$

ou, en remplaçant dans la première n_k et m_k par $\frac{1}{n'_k}$ et $\frac{1}{m'_k}$

$$A_k = -\frac{m'_k C_{k+1} - C_k - n'_k B_k(1 - m'_k)}{m'_k(1 - n'_k)}.$$

L'on aura donc, en remplaçant dans I_k, A_k et A'_k par ces valeurs et réduisant

$$\begin{aligned} I_k &= A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k \\ &= \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k) + n'_k(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)}{1 - n'_k}. \end{aligned}$$

La relation (16)

$$\sum_{k=1}^{k=p} I_k = 0,$$

peut donc s'écrire

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k)}{1 - n'_k} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k}{1 - n'_k}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k) = 0$$

où la symétrie se met aisément en évidence. En effet remarquons que la somme

$$\sum_{k=1}^{k=p} (C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)$$

se réduit à

$$C_{p+1}C'_{p+1} - C_1 C'_1$$

c'est à dire à *zéro*, puisque

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C'_{p+1} = 0.$$

Ajoutons alors la moitié de cette somme nulle à la relation (17), nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k)}{1 - n'_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1 + n'_k}{1 - n'_k}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k) = 0,$$

relation dont le premier membre ne fait que changer de signe quand on remplace B'_k, C'_h, m'_k, n'_k par B_k, C_h, m_k, n_k et inversement B_k, C_h, m_k, n_k par B'_k, C'_h, m'_k, n'_k.

Ainsi, en supposant le genre p égal à 2 on a la relation suivante, puisqu'alors

$$C_1 = C'_1 = C_3 = C''_3 = 0:$$

$$(18) \qquad \frac{n'_1 B_1 C'_2 + B'_1 C_2}{1 - n'_1} - \frac{n'_2 B_2 C'_2 + B'_2 C'_2}{1 - n'_2} + \frac{C_2 C'_2}{2}\left(\frac{1 + n'_1}{1 - n'_1} - \frac{1 + n'_2}{1 - n'_2}\right) = 0.$$

Intégrales de troisième espece.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, l'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z)dz$$

est de *troisième espèce,* lorsqu'en certains points $z_1, z_2, \ldots$ de la surface de Riemann elle devient infinie comme

$$K_1 \log(z - z_1), \qquad K_2 \log(z - z_2), \quad \ldots$$

$K_1, K_2, \ldots$ désignant des constantes.

L'intégrale la plus simple de troisième espèce sera celle qui reste *finie* sur toute la surface de Riemann, *sauf en un seul point* z_0 où elle devient infinie comme

$$\log(z - z_0).$$

Une telle intégrale *existe toujours, excepté dans le cas spécial* où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas spécial, toute intégrale de troisième espèce a *au moins deux infinis logarithmiques* z_0 et z_1, comme nous le verrons plus loin.

En laissant de côté ce cas spécial, nous allons former l'intégrale annoncée qui devient infinie en un seul point z_0 et cela comme

$$\log(z - z_0).$$

Soit

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0) dz$$

cette intégrale. La fonction $\varphi(z, z_0)$ devra être uniforme et régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettre les multiplicateurs donnés m_k et n_k et devenir en chaque point à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; cette fonction pourra devenir infinie en certains points de ramification ζ comme une puissance de $\frac{1}{z - \zeta}$ inférieure à l'unité; enfin elle devra devenir infinie au point z_0 comme $\frac{1}{z - z_0}$. Pour former cette fonction $\varphi(z, z_0)$, désignons comme précédemment par

$$w(z) = \int w'(z) dz$$

une intégrale abélienne de première espèce, et par

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

les $(2p - 2)$ zéros de la fonction algébrique $w(z)$ qui sont situés à distance finie, zéros qui vérifient les p relations connues (page 22)

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Le rapport

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)}$$

sera une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k et n_k, et devenant infinie aux $(2p - 1)$ points

$$z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction aura aussi $(2p - 1)$ zéros

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2},$$

et son expression sera

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]},$$

les infinis et les zéros étant liés par les p relations

$$w_k(\beta_0) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

Comme l'on a

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$\sum_{j=0}^{j=2p-2} w_k(\beta_j) \tag{19}$$

$$= w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

On conclut de là que l'on peut choisir arbitrairement $(p-1)$ zéros, $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ par exemple, et déterminer les p zéros restants β_0, $\beta_1\,,\,\ldots\,,\,\beta_{p-1}$ en fonction des premiers et de z_0.

Il est essentiel de montrer que la fonction

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)}$$

ainsi déterminée devient *effectivement infinie* au point donné z_0; pour cela il faut montrer que, les zéros $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ étant choisis arbitrairement d'une manière convenable, aucun des p zéros restants $\beta_0\,,\beta_1\,,\ldots,\,\beta_{p-1}$ déterminés par les équations (19) *ne coïncide avec* z_0. Si l'un de ces zéros, β_0 par exemple, coïncidait avec z_0, les équations (19) deviendraient

$$(20)\qquad \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]. \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

et elles détermineraient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$; elles établiraient donc une relation entre β_p et $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$, ce qui est *impossible* puisque nous choisissons arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Il est donc absurde de supposer que β_0 coïncide avec z_0 quand on choisit arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$.

Il est cependant un cas spécial où les relations (20) ne détermineraient pas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$: c'est le cas où les seconds membres des relations (20) se réduiraient aux constantes G_k, à des multiples près des modules de périodicité des intégrales abéliennes $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$, c'est à dire où l'on aurait

$$(21)\qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] \equiv 0. \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

Les équations (20) présenteraient alors le cas d'indétermination déjà signalé (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, n° 56), et elles permettraient de prendre arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$; il n'y aurait donc plus une absurdité à supposer que β_0 coïncide avec z_0. Mais, lorsque les multiplicateurs m_k et n_k satisfont aux relations (21), ils sont identiques aux multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

comme nous l'avons vu dans la première partie (page 15). Donc, *en écartant ce cas spécial* qui sera examiné à part, on pourra former une fonction

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde\omega_{z_0\beta_0}(z) + \tilde\omega_{\gamma_1\beta_1}(z) + \ldots + \tilde\omega_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]}$$

régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs donnés, devenant infinie

du premier ordre au point z_0 et aux points $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les zéros de $w'(z)$ situés à distance finie. La fonction

$$\varphi(z, z_0) = Cw'(z)e^{\tilde{\omega}_{z_0,\beta_0}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1,\beta_1}(z)+\dots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2},\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+\dots+w_p(z)\log m_p]}$$

a donc, comme seuls infinis, le point z_0 et les infinis de $w'(z)$; de plus elle devient à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Déterminons le facteur constant C de telle façon que le résidu de $\varphi(z, z_0)$ relatif au point z_0 soit égal à l'unité, c'est à dire que la différence

$$\varphi(z, z_0) - \frac{1}{z - z_0}$$

reste finie pour $z = z_0$. Alors l'intégrale

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0)dz$$

sera une intégrale de troisième espèce devenant infinie au seul point z_0 de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Nous employons, pour désigner cette intégrale, la lettre ϖ que l'on emploie aussi pour les intégrales abéliennes de troisième espèce: mais il ne pourra pas y avoir de confusion, car l'intégrale abélienne de troisième espèce est désignée par $\varpi_{z_0 z_1}(z)$ et la nôtre par $\varpi(z, z_0)$.

Si nous appelons $\Pi(z, z_0)$ l'intégrale la plus générale d'une fonction aux multiplicateurs donnés, admettant un seul infini z_0 de telle façon que la différence

$$\Pi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie au point z_0, cette intégrale sera de la forme

$$\Pi(z, z_0) = \varpi(z, z_0) + \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ sont des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_{p-1}(z)$ les

intégrales de première espèce de fonctions aux multiplicateurs donnés. En effet la différence

$$\Pi(z, z_0) - \varpi(z, z_0)$$

est une intégrale *partout finie,* c'est à dire une intégrale de première espèce.

Cas spécial. Examinons maintenant le cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Alors une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant les multiplicateurs m_k et n_k est de la forme

$$E(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction algébrique rationnelle en s et z. Comme le facteur $E(z)$ est partout fini et différent de zéro, les infinis du produit $E(z)R(s, z)$ sont ceux de $R(s, z)$. L'on sait que, si la fonction algébrique $R(s, z)$ est en chaque point à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, la somme des résidus de cette fonction $R(s, z)$ sur toute la surface de Riemann est *nulle;* cette fonction admet donc *au moins deux* résidus différents de zéro, si tous ses résidus ne sont pas nuls. *Par conséquent, si le produit $E(z)R(s, z)$ n'a que des infinis d'ordre inférieur au second, il a au moins deux infinis du premier ordre, ou bien il n'en a aucun.* Si donc l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

ne doit avoir que des infinis logarithmiques, elle en a au moins deux, ou bien elle n'en a aucun et est de première espèce.

Voici comment on obtiendra une intégrale de cette forme avec deux infinis logarithmiques. Soit, comme précédemment

$$\varpi_{z_0 z_1}(z)$$

l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme $\log \frac{z - z_1}{z - z_0}$ et

$$\varpi'_{z_0 z_1}(z)$$

la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale: cette fonction devient infinie aux points de ramification d'un ordre inférieur à l'unité, elle devient infinie du premier ordre aux points z_0 et z_1 avec les résidus -1 et $+1$. L'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)dz$$

sera l'intégrale de troisième espèce la plus simple formée avec une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k. Cette intégrale est finie partout, sauf aux deux points z_0 et z_1 où elle devient infinie de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0, z_1) + E(z_0)\log(z - z_0) - E(z_1)\log(z - z_1)$$

reste finie.

L'intégrale la plus générale possédant cette propriété est

$$\varpi(z, z_0, z_1) + \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \ldots + \mu_p\omega_p(z) + \text{const.},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ désignant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \ldots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k, intégrales qui sont au nombre de p. (Page 26.)

Modules de périodicité des intégrales de troisième espèce.

Prenons d'abord le cas où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$; soit, comme précédemment, $\varpi(z, z_0)$ l'intégrale de troisième espèce qui devient infinie au seul point z_0 de la surface de Riemann R_{ab} de telle façon que la différence

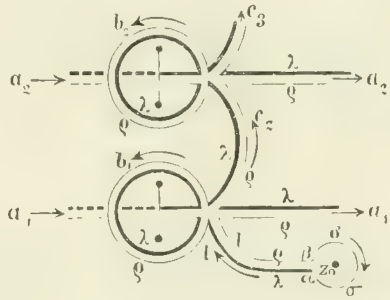
$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Si l'on suppose tracées les coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p; \; c_2, c_3, \ldots, c_p,$$

de la même façon que plus haut (page 31), on voit que l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ n'est pas uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} ainsi obtenue; car, si le point z tourne autour de z_0, cette intégrale augmente de $2\pi i$.

En suivant la méthode exposée par C. NEUMANN (loc. cit. pages 220 et suivantes) nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h un lacet l entourant le point z_0 et nous supposerons, pour simplifier, que ce lacet l aboutisse au point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure. Sur cette figure le bord gauche du lacet l est marqué d'un trait plus gros; λ désigne, comme précédemment, un point du bord gauche de ce lacet ou d'une coupure quelconque et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit; enfin α et β désignent les deux points où la circonférence σ de rayon infiniment petit entourant le point z_0 se raccorde avec les deux bords de l.



L'intégrale $\varpi(z, z_0)$ est alors uniforme sur la surface de Riemann ainsi découpée que nous désignerons par R_{abcl}. On voit, comme on l'a fait pour l'intégrale de première espèce (page 32), que l'on a:

$$\text{le long de la coupure } a_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - m_k \varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{A}_k, \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } b_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - n_k \varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{B}_k, \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } c_h: \quad \varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{C}_h, \quad (h=2,3,\ldots,p)$$

les lettres $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ désignant des constantes que nous appellerons *modules de périodicité de l'intégrale* $\varpi(z, z_0)$ le long des coupures a_k, b_k. c_h.

Reste le lacet l. La différence

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0)$$

des valeurs que prend l'intégrale sur les deux bords de ce lacet l est aussi constante, car sa différentielle est nulle. Cette différence constante le long du lacet l est égale en particulier à

$$\varpi(\alpha, z_0) - \varpi(\beta, z_0)$$

(voyez la figure de la page précédente), c'est à dire à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ prise dans le sens négatif sur la petite circonférence σ entourant le point z_0: elle est donc

$$-2\pi i,$$

car la dérivée de $\varpi(z, z_0)$ admet le point z_0 comme pôle de résidu $+1$.

Ainsi, l'on a, le long de la coupure l,

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = -2\pi i.$$

En résumé, l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ admet $3p$ modules de périodicité, à savoir

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p & \text{sur les coupures} & a_1, a_2, \ldots, a_p, \\ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p & \text{sur les coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p & \text{sur les coupures} & c_2, \ldots, c_p, \\ -2\pi i & \text{sur la coupure} & l. \end{array}$$

Relations entre ces modules de périodicité.

En appliquant à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ les raisonnements appliqués aux pages 33 et 34 à l'intégrale de première espèce $\omega(z)$, nous déduirons, de la considération de chacun des points de croisement des coupures, une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs correspondants.

Le point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et l, (voyez la figure de la page précédente) donne ainsi la relation

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) + 2m_1 n_1 \pi i + n_1 \mathfrak{C}_2 = 0;$$

le point de croisement des coupures a_2, b_2, c_2, c_3 donne de même la relation

$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2 n_2 \mathfrak{C}_2 + n_2 \mathfrak{C}_3 = 0;$$

et ainsi de suite.

On obtiendra en tout, comme aux pages 33 et 34, le système des p relations suivantes

$$(22) \qquad \mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}_k + n_k \mathfrak{C}_{k+1} = 0,$$

où l'on fait

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

en convenant que

$$\mathcal{C}_1 = -2\pi i, \qquad \mathcal{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_p$ entre ces p relations fournira facilement l'équation

$$(23) \qquad 2\pi i + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathcal{B}_k(1-m_k) - \mathcal{A}_k(1-n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0,$$

qu'il est intéressant de rapprocher de l'équation analogue relative aux intégrales de première espèce (voyez page 34, équation 13).

Remarque. Il serait *absurde* de supposer ici les multiplicateurs m_k et n_k tous égaux à l'unité, car, dans cette hypothèse, l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ avec *un seul* infini logarithmique *n'existerait plus,* comme il est bien connu par la théorie des intégrales abéliennes.

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Désignons, comme plus haut, par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et appelons

$$A'_k, \; B'_k, \; C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale relatifs aux coupures a_k, b_k, c_h.

L'intégrale

$$J = \int \Omega(z)\, d\varpi(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abcl} (voyez page 49) est *nulle;* car, sur cette surface R_{abcl}, la fonction

$$\Omega(z) \frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

est régulière et a tous ses résidus nuls.

Si l'on appelle λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, les éléments de l'intégrale J correspondant à ces deux points seront:

$$\Omega(\lambda)\, d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)\, d\varpi(\rho, z_0),$$

car les deux bords de la coupure sont parcourus en sens contraire par la variable d'intégration. Comme, outre les deux bords des coupures a_k, b_k, c_h et l, le contour de la surface R_{abcl} comprend encore la circonférence infiniment petite σ entourant le point z_0 et raccordant les deux bords de la coupure l, il faudra avoir soin de prendre l'intégrale J sur les deux bords de toutes les coupures et sur la circonférence σ. On a donc

$$J = \sum_{k=1}^{k=p} \Bigg[\int_{a_k} [\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0)]$$

$$+ \int_{b_k} [\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0)] \Bigg]$$

$$+ \sum_{h=2}^{h=p} \int_{c_h} [\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0]$$

$$+ \int_l [\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0)] + \int_\sigma \Omega(z) d\varpi(z, z_0);$$

les indices dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les premières intégrales sont prises le long des coupures marquées par l'indice et la dernière le long de la petite circonférence σ dans le sens de la flèche. Cette dernière intégrale est facile à calculer. En effet, dans l'intérieur de cette circonférence σ la fonction soumise à l'intégration

$$\Omega(z) \frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

admet le pôle simple z_0 avec le résidu $\Omega(z_0)$, car le facteur $\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$ admet ce pôle avec le résidu $+ 1$. On a donc, puisque la circonférence σ est parcourue dans le sens négatif autour de z_0,

$$\int_\sigma \Omega(z) d\varpi(z, z_0) = -2\pi i \Omega(z_0).$$

Quant à l'intégrale affectée de l'indice l

$$\int_l [\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0)],$$

elle est *nulle;* car le long de la coupure l on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho), \qquad d\varpi(\lambda, z_0) = d\varpi(\rho, z_0).$$

Enfin, la somme des $(3p - 1)$ premières intégrales relatives aux coupures a_k, b_k, c_h, qui figurent dans l'intégrale J de la page précédente, peut être déduite de la somme des intégrales analogues qui constituent l'intégrale I envisagée à la page 36, en remplaçant dans cette dernière somme $\omega(z)$ par $\varpi(z, z_0)$. On en conclut, en répétant la suite des transformations que l'on a fait subir à l'intégrale I aux pages 37 et suivantes, que l'intégrale J a pour valeur

$$J = -2\pi i \Omega(z_0)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k \mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k \mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1} \mathfrak{B}_k].$$

Cette intégrale J étant nulle, on a la relation

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k \mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k \mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1} \mathfrak{B}_k]$$
$$= 2\pi i \Omega(z_0),$$

dont le premier membre se déduit du premier membre de la relation 16 (page 40) en remplaçant dans cette relation les modules de périodicité A_k, B_k, C_h de l'intégrale de première espèce $\omega(z)$ par les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ de l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$. Il faudra bien entendu faire

$$C'_1 = C''_{p+1} = \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

Quant à la constante $\mathfrak{C}_1$ elle doit être considérée comme égale à $-2\pi i$ qui est le module de périodicité de $\varpi(z, z_0)$ sur la coupure l, comme nous l'avons déjà dit à la page 51.

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut (page 48), l'intégrale la plus simple de troisième espèce d'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est donnée par la formule

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz,$$

$\varpi_{z_0 z_1}(z)$ désignant l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$\log \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

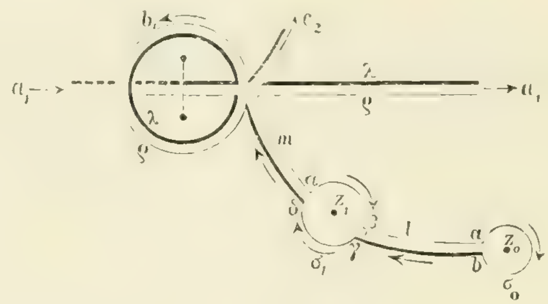
et $\varpi'_{z_0 z_1}(z)$ étant la dérivée de cette intégrale. L'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ est partout finie sauf aux points z_0, z_1 où elle devient infinie comme

$$E(z_1) \log(z - z_1) - E(z_0) \log(z - z_0).$$

Pour obtenir une surface sur laquelle l'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1)$$

reste uniforme, nous suivrons encore la méthode exposée par C. Neumann (loc. cit. pages 220 et suivantes) et nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h



un lacet $l + m$ dont les deux bords sont infiniment rapprochés et qui renferme deux petites ouvertures circulaires σ_0 et σ_1 entourant les points z_0 et z_1. Nous supposerons de plus que ce lacet parte du point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure; nous désignerons, avec C. Neumann, par R_{abclm} la surface de Riemann ainsi délimitée.

L'intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz$$

est régulière sur cette surface R_{abclm}: elle possède $(3p + 1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\begin{array}{llr}
\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p & \text{le long des coupures} & a_1, a_1, \ldots, a_p, \\
\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p & \text{le long des coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\
\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p & \text{le long des coupures} & c_2, \ldots, c_p, \\
\mathfrak{L}, \mathfrak{M} & \text{le long des coupures} & l, m.
\end{array}$$

Les constantes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont faciles à calculer. En appelant a et b les deux points où la circonférence σ_0 entourant z_0 se raccorde avec les bords de la coupure l, on aura

$$\mathfrak{L} = \varpi(b, z_0, z_1) - \varpi(a, z_0, z_1) = \int_a^b E(z)\varpi'_{z_0z_1}(z)dz,$$

l'intégration étant faite sur la circonférence σ_0 dans le sens marqué par une flèche. Comme, à l'intérieur du cercle σ_0, la fonction intégrée possède le pôle $z = z_0$ avec le résidu $-E(z_0)$, l'intégrale qui est prise autour de ce pôle dans le sens négatif a pour valeur

$$\mathfrak{L} = 2\pi i E(z_0).$$

Quant à la constante $\mathfrak{M}$ elle est égale à la différence des valeurs de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ aux deux points δ et α où les deux bords de la coupure m se raccordent avec la circonférence σ_0. (Voyez la figure de la page précédente.)

$$\mathfrak{M} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

D'autre part on a aussi, en considérant les deux points β et γ où les deux bords de la coupure l rencontrent cette circonférence σ_1,

$$\mathfrak{L} = \varpi(\gamma, z_0, z_1) - \varpi(\beta, z_0, z_1);$$

d'où en retranchant

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\gamma, z_0, z_1) + \varpi(\beta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

Or le second membre de cette relation n'est autre chose que l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ prise sur la circonférence σ_1 dans le sens de la flèche. Comme la fonction

$$E(z)\varpi'_{z_0z_1}(z)$$

a, dans le cercle σ_1, le seul pôle z_1 avec le résidu $E(z_1)$, l'intégrale de cette fonction prise dans le sens négatif sur la circonférence σ_1 est

$$-2\pi i E(z_1).$$

On obtient donc la relation

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = -2\pi i E(z_1),$$

d'où, d'après la valeur trouvée auparavant pour $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{M} = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)].$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$.

La considération des p points de croisement des coupures donnera, comme pour l'intégrale de première espèce (page 34), les p relations

$$\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}_k + n_k \mathfrak{C}_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

avec la convention que

$$\mathfrak{C}_1 = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)], \qquad \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ entre ces p relations fournira l'équation

$$(25) \qquad 2\pi i[E(z_1) - E(z_0)] + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0$$

analogue à la relation (23) de la page 51.

Relation entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ et ceux d'une intégrale de première espèce $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses.

En écrivant que l'intégrale

$$\int \Omega(z) d\varpi(z, z_0, z_1),$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abclm}, est *nulle*, et transformant cette intégrale comme on l'a fait pour une intégrale du même

genre à propos des intégrales de première (pages 36 à 40) ou de troisième espèce (pages 51 à 53), on obtiendra la relation

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}_k]$$
$$= 2\pi i[\Omega(z_1)E(z_1) - \Omega(z_0)E(z_0)].$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, leurs inverses m'_k et n'_k deviendront aussi l'unité, l'exponentielle $E(z)$ se réduira également à l'unité, enfin $\Omega(z)$ et $\varpi(z, z_0, z_1)$ deviendront des *intégrales abéliennes* l'une de première l'autre de troisième espèce. Comme, dans cette hypothèse, les constantes $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ et $C''_1, C''_2, \ldots, C''_p$ deviennent nulles, les constantes $\mathfrak{C}_{p+1}$ et C''_{p+1} étant nulles par convention, la relation (26) que nous venons de trouver se réduit à la relation bien connue

$$\sum_{k=1}^{k=p}(A'_k\mathfrak{B}_k - B'_k\mathfrak{A}_k) = 2\pi i[\Omega(z_1) - \Omega(z_0)]$$

qui lie les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, d'une intégrale abélienne de troisième espèce, aux modules de périodicité A'_k et B'_k d'une intégrale abélienne de première espèce $\Omega(z)$.

Intégrales de seconde espèce.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$, l'intégrale

$$\int \Phi(z)\,dz$$

sera de *deuxième espèce* si elle n'admet que des infinis *algébriques*. D'après cela, l'intégrale de *seconde espèce* la plus simple qu'on puisse imaginer est celle qui ne devient infinie qu'en un point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

Une telle intégrale existe toujours, quelle que soit la position du point

z_0, *à condition que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle de la forme*

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

non réduite à une constante.

Supposons d'abord que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle telle que $E(z)$. Nous formerons alors, comme il suit, l'intégrale de *seconde espèce* avec un seul pôle du premier ordre de résidu $+1$.

Appelons, comme plus haut, $w(z)$ une intégrale abélienne de première espèce et $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale. Cette fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p - 2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

liés par les p relations bien connues

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

Formons une fonction $\psi(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k, devenant infinie du premier ordre aux points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

et *infinie du second ordre* en un point z_0 donné arbitrairement. Cette fonction $\psi(z)$ ayant $2p$ infinis, puisque z_0 compte pour deux, aura aussi $2p$ zéros que nous nommerons

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction $\psi(z)$ sera

$$\psi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0 u}(z) + \tilde{\omega}_{z_0 v}(z) + \tilde{\omega}_{\gamma_1 \beta_1}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]},$$

les zéros

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et les infinis

$$z_0, z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

étant liés par les p relations

$$w_k(u) - w_k(z_0) + w_k(v) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$
$$= \frac{1}{2} \log n_k - \frac{1}{2\pi i} [b_{1k} \log m_1 + b_{2k} \log m_2 + \ldots + b_{pk} \log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Comme la somme

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j)$$

est égale à la constante G_k, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$w_k(u) + w_k(v) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$
$$\equiv 2w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2} \log n_k - \frac{1}{2\pi i} [b_{1k} \log m_1 + \ldots + b_{pk} \log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations montrent que, z_0 étant donné, on pourra choisir arbitrairement p zéros

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et déterminer par ces relations les p zéros restants:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p.$$

On pourra toujours choisir les zéros arbitraires

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

de telle façon qu'aucun des zéros restants

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

ne coïncide avec le point z_0. Alors la fonction $\psi(z)$ deviendra effectivement infinie du second ordre au point z_0. Si l'on considère le produit

$$\psi(z) w'(z),$$

on voit qu'il ne devient plus infini en aucun des points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les *zéros* de $w'(z)$; ce produit devient infini du second ordre au point z_0; il devient aussi infini aux infinis de $w'(z)$ et cela comme $w'(z)$; enfin ce produit est, en chaque point à l'infini, infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. On pourra disposer du facteur constant C qui figure dans l'expression de $\psi(z)$, de manière que le produit

$$(z - z_0)^2\psi(z)w'(z)$$

tende vers -1 quand z tend vers z_0. Alors, dans le voisinage de $z = z_0$, on aura pour $\psi(z)w'(z)$ un développement de la forme

$$\psi(z)w'(z) = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{P_0}{z - z_0} + B_0 + C_0(z - z_0) + \ldots,$$

$P_0, B_0, C_0, \ldots$ étant des constantes dont la première est le résidu de $\psi(z)w'(z)$ au pôle z_0. D'après toutes ces propriétés du produit $\psi(z)w'(z)$, l'intégrale

$$\int \psi(z)w'(z)dz$$

reste partout finie excepté au point z_0 où elle devient infinie comme

$$\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0).$$

Puisque, par hypothèse, les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0)$$

dont la dérivée admet les multiplicateurs m_k et n_k et qui devient infinie au point z_0 comme

$$\log(z - z_0).$$

Donc la différence

$$t(z, z_0) = \int \psi(z)w'(z)dz - P_0\varpi(z, z_0)$$

deviendra infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

Nous avons ainsi formé l'intégrale de seconde espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au pôle $z = z_0$ de résidu $+ 1$. Nous désignons cette intégrale par la lettre t que RIEMANN et NEUMANN emploient pour désigner l'intégrale abélienne de seconde espèce. Cela ne pourra pas amener de confusion car notre intégrale est appelée $t(z, z_0)$ et l'intégrale abélienne avec le pôle simple z_0 est appelée par NEUMANN $t_{z_0}(z)$.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas on pourra toujours former comme précédemment l'intégrale

$$\int \psi(z) w'(z) dz$$

qui devient infinie au seul point z_0 comme

$$\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0);$$

mais alors il n'existe plus d'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ devenant infinie en un seul point z_0 comme $\log(z - z_0)$. On ne peut donc plus former l'intégrale $t(z, z_0)$ comme dans le cas général qui précède. Dans le cas actuel cette intégrale n'existe plus: la constante P_0 ne peut être nulle que pour des positions particulières du point z_0. En effet, dans le cas présent, la fonction

$$\frac{\psi(z) w'(z)}{E(z)}$$

est une fonction *algébrique* devenant à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$; et l'on sait que la somme de tous les résidus d'une pareille fonction algébrique est *nulle*. Or le seul pôle de cette fonction, ayant un résidu différent de zéro, est le point z_0: dans le voisinage de ce point on a

$$\psi(z) w'(z) = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{P_0}{z - z_0} + B_0 + \ldots,$$

$$\frac{1}{E(z)} = e^{2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

$$= \frac{1}{E(z_0)} + \frac{2(z - z_0)}{E(z_0)} [\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0)] + \ldots.$$

Si l'on forme le produit

$$\psi(z)w'(z)\cdot\frac{1}{E(z)}$$

et si l'on écrit que dans ce produit, le résidu, c'est à dire le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$, est nul, on a la relation

$$(27) \qquad P_0 = 2[\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0)]$$

qui montre que P_0 n'est nul que pour des *positions exceptionnelles* du point z_0.

Ainsi, dans le cas spécial dont nous nous occupons ici, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce devenant infinie en un point arbitraire z_0 et cela comme $\frac{1}{z-z_0}$. Une telle intégrale ne peut exister que pour des positions *exceptionnelles* du point z_0 vérifiant l'équation

$$\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0) = 0.$$

Mais, quel que soit z_0, il existe alors une intégrale

$$\tau(z, z_0) = \int\psi(z)w'(z)dz$$

devenant infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0\log(z-z_0),$$

P_0 ayant la valeur (27) ci-dessus. Cette intégrale $\tau(z, z_0)$ est, d'après notre classification, de troisième espèce; elle peut aussi être formée de la façon suivante. Si l'on appelle, avec Neumann,

$$t_{z_0}(z)$$

l'intégrale abélienne de seconde espèce admettant le seul pôle z_0 au premier degré et avec le résidu $+1$, on aura

$$\tau(z, z_0) = \frac{1}{E(z_0)}\int E(z)dt_{z_0}(z).$$

En effet la fonction sous le signe $\int$

$$E(z)\frac{dt_{z_0}(z)}{dz}$$

est une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k: dans le voisinage du point z_0 on a, en appelant $E'(z)$ la dérivée de $E(z)$,

$$E(z) = E(z_0) + (z - z_0)E'(z_0) + \dots,$$

$$\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots;$$

d'où, en multipliant membre à membre, puis divisant par $E(z_0)$,

$$\frac{E(z)}{E(z_0)}\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{E'(z_0)}{E(z_0)}\frac{1}{(z-z_0)} + \dots.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{E(z_0)}\int E(z)\,dt_{z_0}(z)$$

devient donc infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z - z_0),$$

car la constante appelée P_0 est précisément

$$-\frac{E'(z_0)}{E(z_0)}.$$

Cette intégrale est, par suite, égale à $\tau(z, z_0)$, ou n'en diffère que par une somme d'intégrales de première espèce.

Puisque, dans ce cas spécial où les multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle $E(z)$, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce avec un seul pôle du premier ordre, l'intégrale de deuxième espèce la plus simple aura au moins *deux pôles* du premier ordre z_0 et z_1. Pour la former, appelons $\tau(z, z_1)$ l'intégrale qui devient infinie au seul point z_1 comme

$$\frac{1}{z-z_1} + P_1 \log(z - z_1), \qquad P_1 = 2[\lambda_1 w_1'(z_1) + \lambda_2 w_2'(z_1) + \dots + \lambda_p w_p'(z_1)],$$

et considérons l'expression

$$t(z, z_0, z_1) = P_1 E(z_0)\tau(z, z_0) - P_0 E(z_1)\tau(z, z_1) + P_0 P_1 \varpi(z, z_0, z_1)$$

où $\varpi(z, z_0, z_1)$ est l'intégrale de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$E(z_1)\log(z - z_1) - E(z_0)\log(z - z_0).$$

Cette intégrale $t(z, z_0, z_1)$ *n'a plus d'infinis logarithmiques:* en effet au point z_0 elle devient infinie comme

$$P_1 E(z_0)\left[\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0)\right] - P_0 P_1 E(z_0)\log(z - z_0)$$

c'est à dire, en réduisant, comme

$$\frac{P_1 E(z_0)}{z - z_0};$$

de même au point z_1 elle devient infinie comme

$$-P_0 E(z_1)\left[\frac{1}{z - z_1} + P_1 \log(z - z_1)\right] + P_0 P_1 E(z_1)\log(z - z_1)$$

c'est à dire comme

$$-\frac{P_0 E(z_1)}{z - z_1}.$$

Remarque. Si l'on suppose que, dans l'exponentielle

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

toutes les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont nulles, cette exponentielle se réduit à l'unité et tous les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ deviennent aussi égaux à l'unité. Alors la constante P_0 est nulle quel que soit z_0 et l'intégrale $\tau(z, z_0)$ se réduit à l'intégrale abélienne de seconde espèce $t_{z_0}(z)$.

Modules de périodicité d'une intégrale de deuxième espèce.

Nous venons de voir que, dans le cas général où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de deuxième espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au point z_0 qui est un pôle simple de résidu $+ 1$. Cette intégrale est régulière sur la surface R_{abc} de RIEMANN: elle possède, comme une intégrale de première espèce, $(3p - 1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de la coupure } a_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{A}'_k, \\
&\text{le long de la coupure } b_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{B}'_k, \qquad (k=1, 2, \ldots, p) \\
&\text{le long de la coupure } c_h \text{ le module de périodicité } \mathfrak{C}'_h. \qquad (h=2, 3, \ldots, p)
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'on a:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de } a_k: \quad t(\lambda, z_0) - m_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{A}'_k, \\
&\text{le long de } b_k: \quad t(\lambda, z_0) - n_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{B}'_k, \qquad (k=1, 2, \ldots, p) \\
&\text{le long de } c_h: \quad t(\lambda, z_0) - t(\rho, z_0) = \mathfrak{C}'_h. \qquad (h=2, 3, \ldots, p)
\end{aligned}$$

Relations entre ces modules.

La considération des points de croisement des coupures fournira entre ces modules de périodicité des relations identiques à celles qui ont été établies pour les modules de périodicité des intégrales de première espèce. (Pages 33 et 34.)

L'on obtient ainsi les p relations

$$\mathfrak{B}'_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}'_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}'_k + n_k \mathfrak{C}'_{k+1} = 0 \tag{28}$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

et où l'on convient de remplacer $\mathfrak{C}'_1$ et $\mathfrak{C}'_{p+1}$ par zéro.

De ces relations l'on déduit par l'élimination de $\mathfrak{C}'_2, \mathfrak{C}'_3, \ldots, \mathfrak{C}'_p$ l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}'_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}'_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0.$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Soit, comme plus haut, $\Omega(z)$, une intégrale de première espèce aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, admettant les modules de périodicité A'_k, B'_k, C'_k.

L'intégrale

$$I' = \int_{R_{abc}} \Omega(z)\, dt(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est égale à

$$-2\pi i \Omega'(z_0),$$

en désignant par $\Omega'(z)$ la dérivée de $\Omega(z)$ par rapport à z. En effet, sur la surface R_{abc} la fonction

$$\Omega(z)\frac{dt(z, z_0)}{dz}$$

est uniforme et régulière: elle admet le pôle z_0 et, dans le voisinage de ce point, on a

$$\Omega(z) = \Omega(z_0) + (z - z_0)\Omega'(z_0) + \ldots,$$

$$\frac{dt(z, z_0)}{dz} = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + a + b(z - z_0) + \ldots;$$

donc, dans le produit $\Omega(z)\dfrac{dt(z, z_0)}{dz}$, le résidu relatif au pôle z_0 est

$$-\Omega'(z_0).$$

Ce produit a d'autres pôles aux points de ramification mais leurs résidus sont tous nuls; de plus il est à l'infini infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Donc l'intégrale I' prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} est égale à la valeur de cette même intégrale prise dans le

même sens sur une petite circonférence entourant le point z_0, c'est à dire à

$$-2\pi i\Omega'(z_0),$$

comme nous l'avions annoncé.

D'autre part l'intégrale I' se transformera exactement comme l'intégrale I que nous avons traitée aux pages 36 et suivantes; et l'on trouvera que cette intégrale est égale à

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k\mathfrak{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}'_k].$$

On a donc la relation

$$(29)\quad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k\mathfrak{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}'_k] = -2\pi i\Omega'(z_0)$$

avec la convention

$$C'_1 = C'_{p+1} = \mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}'_{p+1} = 0.$$

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul pôle simple z_0 n'existe plus. Il faut la remplacer par l'intégrale appelée $t(z, z_0, z_1)$ définie par l'équation (page 63)

$$t(z, z_0, z_1) = P_1E(z_0)\tau(z, z_0) - P_0E(z_1)\tau(z, z_1) + P_0P_1\varpi(z, z_0, z_1),$$

ou encore, d'après les expressions des intégrales

$$\tau(z, z_0),\ \tau(z, z_1),\ \varpi(z, z_0, z_1),$$

$$t(z, z_0, z_1) = P_1\int E(z)dt_{z_0}(z) - P_0\int E(z)dt_{z_1}(z) + P_0P_1\int E(z)d\varpi_{z_0z_1}(z).$$

Les constantes P_0 et P_1 ont les valeurs

$$P_0 = 2[\lambda_1 w'_1(z_0) + \lambda_2 w'_2(z_0) + \ldots + \lambda_p w'_p(z_0)],$$

$$P_1 = 2[\lambda_1 w'_1(z_1) + \lambda_2 w'_2(z_1) + \ldots + \lambda_p w'_p(z_1)].$$

Cette intégrale de seconde espèce est, comme toute intégrale de seconde espèce, uniforme et régulière sur la surface R_{abc} de Riemann; elle admet les deux pôles simples z_0 et z_1 avec les résidus respectifs

$$P_1 E(z_0)\,, \ -P_0 E(z_1).$$

Appelons encore $\mathcal{A}'_k\,, \mathcal{B}'_k\,, \mathcal{C}'_h$ les modules de périodicité de cette intégrale $t(z\,, z_0\,, z_1)$ le long des coupures $a_k\,, b_k\,, c_h$ $\left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\ldots,p \\ h=2,3,\ldots,p\end{smallmatrix}\right)$. Ces modules sont liés entre eux par les p relations

$$\mathcal{B}'_k(1-m_k) - \mathcal{A}'_k(1-n_k) - m_k n_k \mathcal{C}'_k + n_k \mathcal{C}'_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1\,, 2\,, \ldots\,, p,$$

et

$$\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'_{p+1} = 0.$$

Enfin, ces modules de périodicité $\mathcal{A}'_k\,, \mathcal{B}'_k\,, \mathcal{C}'_h$ sont liés aux modules de périodicité $A'_k\,, B'_k\,, C'_h$ d'une intégrale de première espèce $\Omega(z)$, aux multiplicateurs inverses, par la relation

$$\sum_{k=1}^{k=p}\left[A'_k(n'_k\mathcal{B}'_k + \mathcal{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k \mathcal{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathcal{A}'_k + \mathcal{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathcal{B}'_k\right]$$
$$= 2\pi i\left[P_0 E(z_1)\,\Omega'(z_1) - P_1 E(z_0)\,\Omega'(z_0)\right],$$

que l'on obtient par la considération de l'intégrale

$$\int_{R_{abc}} \Omega(z)\,dt(z\,, z_0\,, z_1)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} de Riemann.

Formule de décomposition d'une fonction à multiplicateurs en éléments simples.

De même que, par la formule de Riemann-Roch (Journal de Crelle, t. 84, pag. 294, et C. Neumann loc. cit. page 258), toute fonction rationnelle de s et z, c'est à dire toute fonction régulière sur la surface R de Riemann, peut s'écrire sous la forme d'une somme d'inté-

grales abéliennes de seconde espèce, de façon que les pôles et les parties principales correspondantes se trouvent en évidence; de même toute fonction à multiplicateurs peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales de fonctions à multiplicateurs de première et seconde espèce, de façon à mettre en évidence les pôles et les parties principales correspondantes. Cette formule que nous allons établir remplace avantageusement la formule donnée par M. APPELL (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, t. 9 (1883), page 11). La formule de M. APPELL présente cet inconvénient que l'élément simple devient infini en $(p - 1)$ points étrangers à la question, tandis que notre élément ne devient infini qu'en un point.

Soit $\Phi(z)$ une fonction admettant les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *non spéciaux* c'est à dire ne pouvant pas être identifiés avec ceux d'une exponentielle $E(z)$; cette fonction est régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admet sur cette surface un certain nombre q de pôles

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

que nous supposons d'abord *simples* et *distincts des points de ramification:* soient

$$R_1, R_2, \ldots, R_q$$

les résidus relatifs à ces pôles. Considérons la différence

$$\Delta = \Phi(z) - R_1 t(z, z_1) - R_2 t(z, z_2) - \ldots - R_q t(z, z_q),$$

où $t(z, z_\nu)$ désigne, comme plus haut, l'intégrale de seconde espèce, d'une fonction aux multiplicateurs donnés, qui devient infinie au seul point z_ν et cela comme $\frac{1}{z - z_\nu}$. Cette différence Δ est uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann, car chacun de ses termes l'est; elle demeure sur cette surface partout finie, car dans le voisinage du point $z = z_1$ par exemple on a par hypothèse

$$\Phi(z) = \frac{R_1}{z - z_1} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_1) + \ldots$$

et

$$R_1 t(z, z_1) = \frac{R_1}{z - z_1} + \beta_0 + \beta_1(z - z_1) + \ldots,$$

ce qui montre que la différence Δ reste finie pour $z = z_1$; enfin la dérivée de Δ par rapport à z est régulière sur R_{ab} et admet les multiplicateurs m_k et n_k, puisqu'il en est ainsi de la dérivée de chacun des termes de Δ. Cette différence Δ est donc l'intégrale d'une fonction à multiplicateurs et, comme elle est *partout finie,* c'est une intégrale de *première espèce:* elle peut, par conséquent, se mettre sous la forme

$$\mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1} \omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ étant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_{p-1}(z)$ les $(p-1)$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes. En égalant Δ à cette dernière expression, on obtient la formule cherchée

$$(30) \qquad \begin{aligned} \Phi(z) &= R_1 t(z, z_1) + R_2 t(z, z_2) + \dots + R_q t(z, z_q) \\ &\quad + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1} \omega_{p-1}(z) + C^{te}, \end{aligned}$$

entièrement analogue à la formule de Riemann-Roch. (Voyez C. Neumann, loc. cit. page 258.)

Pour établir cette formule, nous avons supposé les pôles $z_1, z_2, \dots, z_q$ du premier ordre: si l'un de ces pôles, par exemple z_1, était d'ordre n, il faudrait remplacer l'élément

$$R_1 t(z, z_1)$$

par une expression de la forme

$$R_1(z, z_1) + R_1' \frac{\partial t(z, z_1)}{\partial z_1} + R_1'' \frac{\partial^2 t(z, z_1)}{\partial z_1^2} + \dots + R_1^{(n-1)} \frac{\partial^{n-1} t(z, z_1)}{\partial z_1^{n-1}},$$

comme il arrive dans toutes les formules de ce genre. Nous avons aussi supposé les points $z_1, z_2, \dots, z_q$ distincts des points de ramification. Il serait trop long d'indiquer les modifications bien simples que devrait subir la formule, si certains des pôles $z_1, z_2, \dots, z_q$ coïncidaient avec des points de ramification; ces modifications sont identiques à celles qui se présentent dans des conditions analogues pour les fonctions algébriques et les intégrales abéliennes de seconde espèce. (Voyez une Note de M. Goursat *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 97, page 1281.)

On peut, comme vérification, déduire de cette formule de décomposi-

tion, les $(p-1)$ relations qui lient les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_q$ et les pôles correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_q$, relations que nous avons établies directement (page 28). Pour cela, désignons par

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}'_{1r}, \mathfrak{A}'_{2r}, \ldots\ldots\ldots, \mathfrak{A}'_{pr}, \\ \mathfrak{B}'_{1r}, \mathfrak{B}'_{2r}, \ldots\ldots\ldots, \mathfrak{B}'_{pr}, \\ \qquad \mathfrak{C}'_{2r}, \mathfrak{C}'_{3r}, \ldots, \mathfrak{C}'_{pr}, \end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $t(z, z_r)$,

$$r = 1, 2, \ldots, q;$$

et par

$$\begin{array}{l} A_{1j}, A_{2j}, \ldots\ldots\ldots, A_{pj}, \\ B_{1j}, B_{2j}, \ldots\ldots\ldots B_{pj}, \\ \qquad C_{2j}, C_{3j}, \ldots, C_{pj}, \end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale de première espèce $\omega_j(z)$,

$$j = 1, 2, \ldots, (p-1).$$

Comme les modules de périodicité de la fonction $\Phi(z)$ sont *nuls*, puisque $\Phi(z)$ est une fonction à multiplicateurs, la formule de décomposition établie précédemment (page 70) donnera immédiatement les $(3p-1)$ relations

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} R_1\mathfrak{A}'_{k1} + R_2\mathfrak{A}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{A}'_{kq} + \mu_1 A_{k1} + \mu_2 A_{k2} + \ldots + \mu_{p-1} A_{k,p-1} = 0, \\ R_1\mathfrak{B}'_{k1} + R_2\mathfrak{B}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{B}'_{kq} + \mu_1 B_{k1} + \mu_2 B_{k2} + \ldots + \mu_{p-1} B_{k,p-1} = 0, \\ R_1\mathfrak{C}'_{h1} + R_2\mathfrak{C}'_{h2} + \ldots + R_q\mathfrak{C}'_{hq} + \mu_1 C_{h1} + \mu_2 C_{h2} + \ldots + \mu_{p-1} C_{h,p-1} = 0, \end{array} \right.$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p, \qquad h = 2, 3, \ldots, p.$$

Soit, comme dans tout le cours de ce travail, $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et soient

$$A'_k, B'_k, C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. La relation qui lie les modules de périodicité des deux intégrales de première espèce

$$\omega(z)\,,\quad \Omega(z)$$

aux multiplicateurs inverses est, comme nous l'avons vu (page 40)

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k B_{kj} + C_{k+1,j}) - m'_k B'_k A_{kj} - n'_k C'_k(m'_k A_{kj} + B_{kj}) + n'_k C'_{k+1} B_{kj}] = 0,$$

ou, en ordonnant cette relation par rapport à A_{kj}, B_{kj}, $C_{k+1,j}$ et changeant les signes

$$\begin{aligned}(32)\qquad & \sum_{k=1}^{k=p}[A_{kj}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k) \\ & + B_{kj}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - C_{k+1,j} A'_k] = 0,\end{aligned}$$

où

$$C_{1,j} = C_{p+1,j} = C'_1 = C'_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$j = 1\,, 2\,, \ldots, (p-1)$$

on obtiendra $(p-1)$ relations de cette forme. De même la relation qui lie les modules de pérodicité de l'intégrale de deuxième espèce $t(z, z_r)$ et de l'intégrale de première espèce $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses (page 67) peut s'écrire, si on l'ordonne par rapport aux modules de périodicité de $t(z, z_r)$ et si on change les signes

$$\begin{aligned}(33)\qquad & \sum_{k=1}^{k=p}[\mathcal{A}'_{kr}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k) + \mathcal{B}'_{kr}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - \mathcal{C}'_{k+1,r} A'_k] \\ & = 2\pi i \Omega'(z_r)\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{C}'_{1,r} = \mathcal{C}'_{p+1,r} = C''_1 = C''_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$r = 1\,, 2\,, \ldots, q,$$

on obtiendra q relations de cette forme. Cela posé, multiplions cette

dernière relation (33) par R_r et la relation précédente (32) par μ_j et faisons la somme des $q + p - 1$ relations ainsi obtenues

$$(r = 1, 2, \ldots, q; \; j = 1, 2, \ldots, p - 1).$$

Dans cette somme, le premier membre est nul, en vertu des relations qui expriment que les modules de périodicité de $\Phi(z)$ sont nuls (eq. 31, page 71), et il reste

$$R_1 \Omega'(z_1) + R_2 \Omega'(z_2) + \ldots + R_q \Omega'(z_q) = 0,$$

ce qui est la relation établie directement (page 28) entre les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs. Cette relation, comme nous l'avons vu, se décompose en $(p - 1)$ relations distinctes.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, la formule de décomposition que nous avons établie ci-dessus n'est plus applicable, car l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul infini simple n'existe plus. On pourrait alors établir une autre formule de décomposition en éléments simples, en prenant pour élément l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0, z_1)$ avec deux infinis simples qui devient infinie en ces deux points comme

$$\frac{P_1 E(z_0)}{z - z_0} - \frac{P_0 E(z_1)}{z - z_1}.$$ [1]

On aurait ainsi la formule

$$\Phi(z) = \sum_{r=1}^{r=q-1} \frac{R_r}{P_q E(z_r)} t(z, z_r, z_q) + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

P_q désignant la constante $2[\lambda_1 w_1'(z_q) + \lambda_2 w_2'(z_q) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_q)]$, $\omega_1(z)$, $\omega_2(z), \ldots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce qui sont actuellement au nombre de p.

[1] Voir page 63.

Mais il est bien plus simple de remarquer qu'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est de la forme

$$\Phi(z) = E(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z, et d'appliquer ensuite à cette fonction rationnelle $R(s, z)$ la formule de RIEMANN-ROCH, comme le fait M. APPELL. (Journal de mathématiques, publié par M. RESAL, année 1883, page 13, N° 7.)

Expression la plus générale d'une intégrale de fonctions à multiplicateurs.

On démontre sans peine, comme on le fait pour les intégrales abéliennes, que toute intégrale de fonction à multiplicateurs est une somme d'intégrales de première espèce, d'intégrales de troisième espèce, d'intégrales de seconde espèce et de dérivées de ces dernières par rapport au paramètre. C'est ce qui résulte de ce fait, qu'en retranchant, d'une intégrale de fonction à multiplicateurs, des intégrales convenables de troisième espèce et de seconde espèce et des dérivées de ces dernières par rapport au paramètre, on amènera la différence à rester *partout finie.*

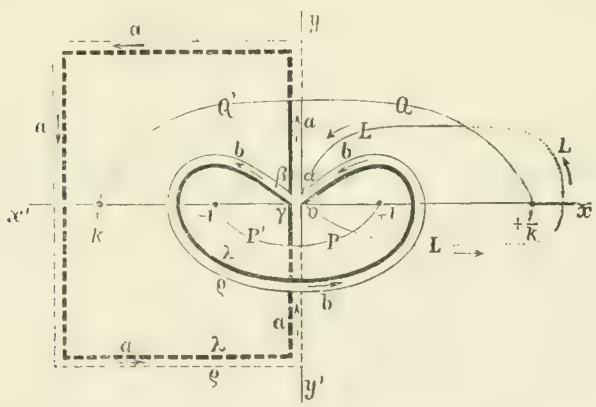
Troisième partie.

Développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Pour montrer, par un exemple simple, comment les intégrales de fonctions à multiplicateurs s'introduisent dans le problème du développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques, nous traiterons d'abord un exemple relatif aux fonctions elliptiques qui fera bien saisir l'esprit de la méthode.

Considérons le relation algébrique

$$s^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$



où nous supposons *k réel et plus petit que l'unité.* La surface de Riemann correspondante possède deux feuillets et quatre points de ramification $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ situés sur l'axe des quantités réelles Ox. On passe

d'un des feuillets à l'autre en traversant l'une ou l'autre des lignes de passage (*Übergangslinien*)

$$+1,\ P,\ P',\ -1;\quad +\frac{1}{k},\ Q,\ Q',\ -\frac{1}{k}.$$

On transformera cette surface de Riemann en une surface R_{ab} simplement connexe à l'aide des coupures a et b, comme le montre la figure. Le point de croisement des deux coupures est à l'origine O qui appartient au bord droit de la coupure a et au bord gauche de la coupure b. Enfin nous supposerons que, dans le feuillet supérieur, la valeur de s est positive pour $z = 0$.

L'intégrale elliptique de première espèce

$$w(z) = \int_0^z \frac{dz}{s} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{ab} figurée à la page précédente.

Le long de la coupure a, on a

$$w(\lambda) - w(\rho) = 4K$$

et le long de la coupure b

$$w(\lambda) - w(\rho) = 2iK',$$

K et K' ayant la signification que leur donne Jacobi et les lettres λ, ρ désignant comme toujours deux points situés en face l'un de l'autre sur les deux bords d'une coupure, λ sur le bord gauche et ρ sur le bord droit. En effet, si l'on désigne par $0, \alpha, \beta, \gamma$ les sommets des quatre angles formés par les bords des coupures a et b en leur point de croisement, la valeur constante de la différence $w(\lambda) - w(\rho)$ le long de la coupure a est égale en particulier à $w(\gamma) - w(0)$, c'est à dire à l'intégrale $w(z)$ prise le long du bord gauche de la coupure b depuis le point 0 jusqu'au point γ, ce qui donne bien $4K$; de même la valeur constante de $w(\lambda) - w(\rho)$ le long de la coupure b est égale en particulier à

$$w(0) - w(\alpha) = -[w(\alpha) - w(0)]$$

et la quantité entre crochets est l'intégrale prise de O en α sur le contour L qui contourne les deux points $+1$ et $+\frac{1}{k}$ dans le sens positif, intégrale égale à $-2iK'$.

En vue de ce qui suit, calculons les valeurs de l'intégrale $w(z)$ aux points à l'infini dans les deux feuillets que nous désignerons par j_0 et j_1, le point j_0 étant à l'infini dans le feuillet supérieur et j_1 dans le feuillet inférieur. Pour cela remarquons que le long de l'axe Ox des quantités réelles on a, pour s, la suite des valeurs suivantes:

feuillet supérieur:

$$\text{entre } 0 \text{ et } +1, \quad s > 0,$$

$$\text{entre } 1 \text{ et } +\frac{1}{k}, \quad \frac{s}{i} < 0,$$

$$\text{entre } \frac{1}{k} \text{ et } +\infty, \quad s > 0;$$

feuillet inférieur:

$$\text{entre } 0 \text{ et } +1, \quad s < 0,$$

$$\text{entre } 1 \text{ et } +\frac{1}{k}, \quad \frac{s}{i} > 0,$$

$$\text{entre } \frac{1}{k} \text{ et } +\infty, \quad s < 0.$$

Les raisonnements qui conduisent à ces signes sont bien connus: ils sont détaillés plus loin à l'occasion d'une question analogue, à la page 88.

D'après cela l'on a pour l'intégrale $w(z)$ les valeurs suivantes aux points $+1$ et $+\frac{1}{k}$:

$$w(1) = K, \qquad w\left(\frac{1}{k}\right) = K - iK',$$

car, pour aller le long de l'axe des x de l'origine au point $\frac{1}{k}$, il faut à partir du point $+1$ suivre l'axe dans le feuillet inférieur de façon à passer sous la coupure b. Si maintenant à partir du point $+\frac{1}{k}$ on

s'éloigne à l'infini le long de l'axe Ox, on aura si l'on s'éloigne dans le feuillet supérieur

$$w(j_0) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

s étant pris *positivement*, et si on s'éloigne dans le feuillet inférieur

$$w(j_1) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

s étant *négatif*. Or on a

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dz}{+\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K;$$

les formules précédentes donneront donc

$$w(j_0) = 2K - iK', \qquad w(j_1) = -iK'.$$

Ces préliminaires étant posés, faisons

$$u = w(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d'où par l'inversion

$$z = \operatorname{sn} u,$$

la fonction $\operatorname{sn} u$ admettant les deux périodes $4K$ et $2iK'$. Lorsque u varie par valeurs réelles de 0 à $4K$, la variable z décrit sur la surface R_{ab} de Riemann un chemin C composé de la portion $0, +1$ de l'axe des quantités réelles Ox dans le feuillet supérieur, de la portion $+1, -1$ de ce même axe dans le feuillet inférieur, enfin de la portion $-1, 0$ de ce même axe dans le feuillet supérieur. La fonction périodique $\operatorname{sn} u$ est donc pour ces valeurs de u développable en une série de Fourier de la forme

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_\nu e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}}$$

avec

$$p_\nu = \frac{1}{4K}\int_0^{4K} z e^{-\frac{\nu\pi u i}{2K}} du,$$

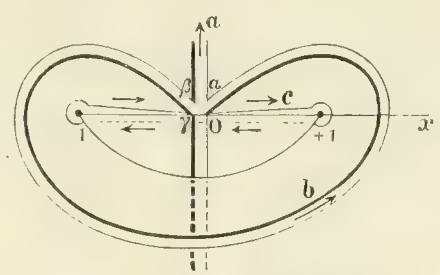
l'intégration étant faite par un chemin réel ou un chemin infiniment voisin. Pour évaluer cette intégrale définie, faisons-y le changement de variable

$$u = w(z), \qquad du = \frac{dz}{s};$$

nous aurons

(34) $$p_\nu = \frac{1}{4K}\int_C \frac{z\,dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)},$$

l'indice C rappelant que la variable z doit parcourir, sur la surface de Riemann R_{ab}, le chemin appelé C et défini à la page précédente, ou un chemin infiniment voisin comme celui que nous figurons ici et qui va, du point O au point γ, après avoir contourné les deux points $+1$, -1 en s'écartant infiniment peu de l'axe Ox.



Dans l'intégrale (34) qui donne p_ν, la fonction sous le signe d'intégration

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}$$

est une *fonction à multiplicateurs,* régulière sur la surface de Riemann R_{ab}. Comme l'intégrale $w(z)$ admet le long des coupures a et b les modules de périodicité $4K$ et $2iK'$, la fonction $\Phi(z)$ admet le long de ces mêmes coupures les multiplicateurs

$$m_1 = 1, \qquad n_1 = q^{-\nu},$$

c'est à dire que cette fonction vérifie les relations:

$$\text{le long de la coupure } a, \quad \Phi(\lambda) = \Phi(\rho),$$

$$\text{le long de la coupure } b, \quad \Phi(\lambda) = q^{-\nu}\Phi(\rho),$$

en faisant, comme il est d'usage,

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Cette fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ rentre dans le cas spécial examiné à la page 14, car ses multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}.$$

L'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s}\, e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = \int_0^z \Phi(z)\,dz$$

est donc une intégrale de fonction à multiplicateurs. C'est une intégrale de troisième espèce admettant pour points critiques logarithmiques les deux points j_0 et j_1 situés à l'infini dans les deux feuillets. En effet, dans le voisinage du point j_0, c'est à dire pour des valeurs de z appartenant au feuillet supérieur et dont le module surpasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{z}{s} = \frac{1}{kz} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \ldots,$$

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(j_0)} + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \ldots.$$

Comme

$$w(j_0) = 2K - iK',$$

ainsi que nous l'avons montré, on a, en multipliant les développements ci-dessus,

$$\Phi(z) = \frac{z}{s}\, e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \ldots,$$

Donc l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \Phi(z)\,dz$$

devient au point j_0 infinie comme

$$\frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

On verra de même que, dans le voisinage du point j_1, on a

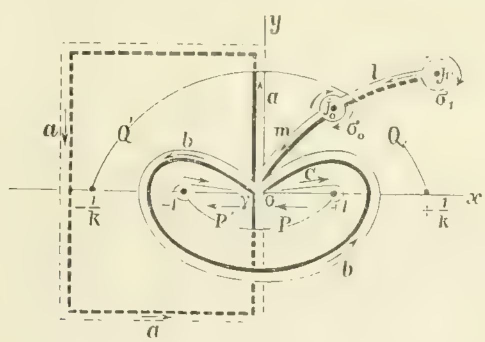
$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \dots.$$

et que l'intégrale $\varpi(z)$ devient au point j_1 infinie comme

$$\frac{-q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

Nous pourrons appliquer à cette intégrale $\varpi(z)$ ce que nous avons dit aux pages 53 et suivantes: il suffira de supposer les points critiques logarithmiques z_0 et z_1 placés à l'infini aux points j_0 et j_1.

L'intégrale $\varpi(z)$ n'est pas uniforme sur la surface de Riemann R_{ab}:



elle est uniforme sur la surface R_{ablm} que l'on obtient en entourant les deux points j_0 et j_1 d'un lacet $l + m$, commençant et finissant au point de croisement des coupures a et b. Ce lacet est représenté dans la figure *schématique* ci-dessus où les points à l'infini j_0 et j_1 sont repré-

sentés comme s'ils étaient à distance finie, l'un j_0 dans le feuillet supérieur, l'autre j_1 dans le feuillet inférieur. Appelons

$$\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}, \ \mathfrak{L}, \ \mathfrak{M}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{\frac{\nu\pi i}{2K}(\ldots)},$$

c'est à dire, supposons que l'on aît

$$\text{le long de la coupure } a: \quad \varpi(\lambda) - \quad \varpi(\rho) = \mathfrak{A},$$

$$\text{le long de la coupure } b: \quad \varpi(\lambda) - q^{-\nu}\varpi(\rho) = \mathfrak{B},$$

$$\text{le long de la coupure } l: \quad \varpi(\lambda) - \quad \varpi(\rho) = \mathfrak{L},$$

$$\text{le long de la coupure } m: \quad \varpi(\lambda) - \quad \varpi(\rho) = \mathfrak{M},$$

car les multiplicateurs sont 1 et $q^{-\nu}$. La formule qui donne p_ν (page 79) est

$$p_\nu = \frac{1}{4K}\int_0^\gamma \frac{z\,dz}{s} e^{\frac{\nu\pi i}{2K}(\ldots)},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C qui va du point O au point γ après avoir entouré les deux points $+1$ et -1 en s'écartant infiniment peu de l'axe Ox; on a donc

$$(35) \qquad p_\nu = \frac{1}{4K}[\varpi(\gamma) - \varpi(0)] = \frac{\mathfrak{A}}{4K}.$$

Ainsi le calcul de p_ν se ramène au calcul du module de périodicité $\mathfrak{A}$. Or ce module est facile à calculer par les relations générales que nous avons établies et que nous allons reprendre pour le cas particulier actuel. Figurons les coupures l et m raccordées par deux circonférences infiniment petites σ_0 et σ_1 entourant les points j_0 et j_1. On a, pour le module de périodicité le long de l:

$$\mathfrak{L} = \varpi(\lambda) - \varpi(\rho).$$

Ce module $\mathfrak{L}$ est donc l'intégrale $\varpi(z)$ prise sur la circonférence σ_1 dans le sens de la flèche: or, dans le voisinage du point j_1, on a (page 81)

$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \dots,$$

donc l'intégrale

$$\varpi(z) = \int \Phi(z)\,dz$$

prise sur la petite circonférence σ_1 dans le sens de la flèche est

$$-\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On trouve ainsi

$$\mathfrak{L} = -\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

La figure donne aussi

$$\mathfrak{M} = \varpi(\theta) - \varpi(\chi), \qquad \mathfrak{L} = \varpi(\varepsilon) - \varpi(\eta),$$

d'où en retranchant

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = \varpi(\theta) - \varpi(\varepsilon) + [\varpi(\eta) - \varpi(\chi)],$$

ce qui montre que $\mathfrak{M} - \mathfrak{L}$ est l'intégrale $\varpi(z)$ prise dans le sens de la flèche sur la circonférence σ_0 entourant le point j_0. Comme, dans le voisinage de j_0, on a (page 80)

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \dots,$$

l'intégrale

$$\varpi(z) = \int \Phi(z)\,dz$$

prise sur la circonférence σ_0 dans le sens de la flèche est

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = (-1)^\nu \frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On aura donc, d'après la valeur que nous venons de trouver pour $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi i}{k} [(-1)^\nu - 1] q^{\frac{\nu}{2}}.$$

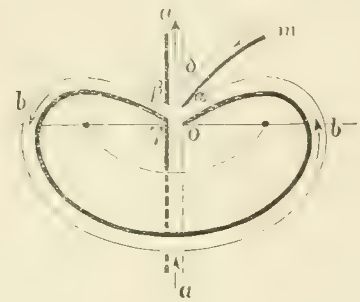
Il va de soi que, comme les points j_0 et j_1 sont à l'infini, la petite circonférence σ_1 entourant le point j_1 est en réalité une circonférence très grande de centre O située dans le feuillet inférieur et parcourue de ρ jusqu'en λ dans le sens positif autour de O; il en est de même pour σ_0.

Le point de croisement des coupures a, b, m donne la relation

$$\mathcal{B}(1 - m_1) - \mathcal{A}(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathcal{M} = 0$$

où

$$m_1 = 1, \qquad n_1 = q^{-\nu}.$$



C'est ce qui résulte de la relation générale de la page 56; en voici d'ailleurs la démonstration. On a, d'après la définition même des modules de périodicité, les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\varpi(\gamma) &= \varpi(0) + \mathcal{A},\\
\varpi(\gamma) &= q^{-\nu}\varpi(\beta) + \mathcal{B},\\
\varpi(\beta) &= \varpi(\delta) + \mathcal{A},\\
\varpi(\alpha) &= \varpi(\delta) + \mathcal{M},\\
\varpi(0) &= q^{-\nu}\varpi(\alpha) + \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Multipliant ces relations respectivement par $+1$, -1, $-q^{-\nu}$, $q^{-\nu}$, $+1$ et ajoutant, on a la relation cherchée

$$\mathcal{A}(1 - q^{-\nu}) + \mathcal{M} q^{-\nu} = 0,$$

d'où

$$\mathcal{A} = -\frac{q^{-\nu}}{1 - q^{-\nu}}\mathcal{M}.$$

c'est à dire, d'après la valeur trouvée pour $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\pi i}{k} \frac{q^{-\frac{\nu}{2}}}{1 - q^{-\nu}} [1 - (-1)^{\nu}].$$

Enfin comme le coefficient p_ν est égal à

$$\frac{\mathfrak{A}}{4K},$$

on a

$$p_\nu = \frac{\pi i}{2Kk} \cdot \frac{1 - (-1)^{\nu}}{q^{\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

Ce coefficient est *nul* quand ν est *pair*, et quand ν est impair,

$$\nu = 2n + 1,$$

il a pour valeur

$$p_\nu = \frac{\pi i}{Kk} \frac{1}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

On a donc pour le développement cherché

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_\nu e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}} = \frac{\pi i}{Kk} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}}}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}},$$

ν ne prenant que des valeurs impaires $2n + 1$. En réunissant les termes qui correspondent à des valeurs de ν égales et de signes contraires, on obtient enfin

$$z = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \sin\frac{(2n + 1)\pi u}{2K},$$

ce qui est le développement bien connu que JACOBI a donné pour $\sin \operatorname{am} u$. Il nous paraît remarquable que l'on puisse ainsi obtenir ce développement sans se servir des fonctions θ ni de la théorie des fonctions elliptiques.

La méthode que nous venons de suivre donnerait, de même, les développements en séries trigonométriques de toute fonction de u exprimée par une fonction rationnelle $R(s, z)$ de s et z, c'est à dire de toute

fonction elliptique. Le calcul des coefficients se ramènera au calcul des modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs de la forme spéciale

$$\int R(s\,,\,z)dz\,.\,e^{\frac{\nu\pi i}{2K}u(\;)}.$$

Ces modules se calculeront par les méthodes générales que nous avons données dans la deuxième partie.

Plus généralement on pourrait, en suivant la même voie, calculer les coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction doublement périodique de *seconde espèce* admettant la période $4K$ et se reproduisant, multipliée par un facteur constant arbitraire, quand la variable u augmente de $2iK'$.

Mais nous laissons de côté ce cas particulier, où $p = 1$, qui ne pourrait nous donner que des développements plus faciles à obtenir par d'autres méthodes, et nous entrons dans un ordre de recherches entièrement nouveau, en abordant les problèmes analogues pour les *intégrales ultraelliptiques* ($p = 2$) et les fonctions abéliennes de deux variables qui naissent de leur inversion.

Intégrales ultraelliptiques et fonctions abéliennes de genre 2.

Employons les notations de Rosenhain dans son *Mémoire couronné* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de Paris, Tome 11, 1851, page 361), et considérons l'équation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z)$$

ou en abrégeant

$$s^2 = (zk\lambda\mu).$$

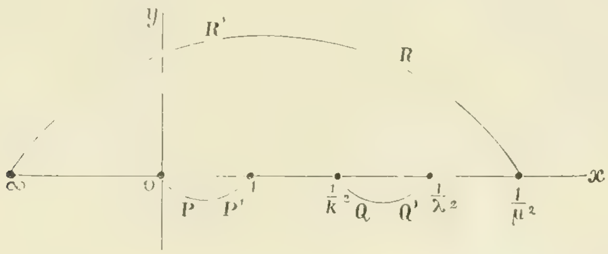
La surface de Riemann correspondante possède deux feuillets et six points de ramification

$$0\,,\ 1\,,\ \frac{1}{k^2}\,,\ \frac{1}{\lambda^2}\,,\ \frac{1}{\mu^2}\,,\ \infty\,.$$

Figurons ces points en supposant les quantités $k\,,\lambda\,,\mu$ réelles positives et

$$1 > k > \lambda > \mu;$$

de plus figurons le point à l'infini comme s'il était à distance finie sur la partie négative de l'axe des quantités réelles. Il y aura trois lignes



de passage d'un feuillet à l'autre (*Übergangslinien* d'après C. Neumann), à savoir les lignes

$$0PP'1\ ,\ \frac{1}{k^2}QQ'\frac{1}{\lambda^2}\ ,\ \frac{1}{\mu^2}RR'\infty.$$

Nous conviendrons de prendre la *valeur positive* de

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

en tous les points du *feuillet supérieur situés sur l'axe des quantités réelles Ox entre* 0 *et* 1. Alors les valeurs de s aux différents points de l'axe Ox des quantités réelles sont de la forme suivante:

Feuillet supérieur. z réel.	$0 < z < 1$	$\ldots\ s > 0,$
	$1 < z < \frac{1}{k^2}$	$\ldots\ \frac{s}{i} < 0,$
	$\frac{1}{k^2} < z < \frac{1}{\lambda^2}$	$\ldots\ s < 0,$
	$\frac{1}{\lambda^2} < z < \frac{1}{\mu^2}$	$\ldots\ \frac{s}{i} > 0,$
	$\frac{1}{\mu^2} < z < +\infty$	$\ldots\ s < 0,$
	$\infty < z < 0$	$\ldots\ \frac{s}{i} > 0.$

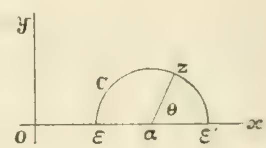
Feuillet inférieur. z réel.

$$\left|\begin{array}{lr}
0 < z < 1 & \ldots\ s < 0, \\[4pt]
1 < z < \dfrac{1}{k^2} & \ldots\ \dfrac{s}{i} > 0, \\[8pt]
\dfrac{1}{k^2} < z < \dfrac{1}{\lambda^2} & \ldots\ s > 0, \\[8pt]
\dfrac{1}{\lambda^2} < z < \dfrac{1}{\mu^2} & \ldots\ \dfrac{s}{i} < 0, \\[8pt]
\dfrac{1}{\mu^2} < z < +\infty & \ldots\ s > 0, \\[8pt]
-\infty < z < 0 & \ldots\ \dfrac{s}{i} < 0.
\end{array}\right.$$

Les valeurs de ce tableau résultent de la proposition élémentaire suivante. Soit un point α sur Ox et σ une détermination du radical $\sqrt{z-a}$ en un point ε infiniment voisin de α situé à gauche de α; si la variable z décrit autour de α comme centre, avec $\alpha\varepsilon$ comme rayon, un demi-cercle situé au dessus de Ox, $\varepsilon C\varepsilon'$. la valeur σ' du radical $\sqrt{z-a}$ au point ε' sera

$$\sigma' = -i\sigma.$$

En effet sur le cercle on a



$$z - \alpha = re^{\theta i},$$

$$\sqrt{z-a} = \sqrt{r}\,e^{\frac{\theta i}{2}}.$$

Supposons qu'au point ε on prenne $\theta = \pi$, alors

$$\sigma = \sqrt{r}\,e^{\frac{\pi i}{2}} = i\sqrt{r};$$

quand z décrit le demi-cercle $\varepsilon C\varepsilon'$, θ décroît de π à 0, et le radical $\sqrt{z-a}$ prend en ε' la valeur

$$\sigma' = \sqrt{r}.$$

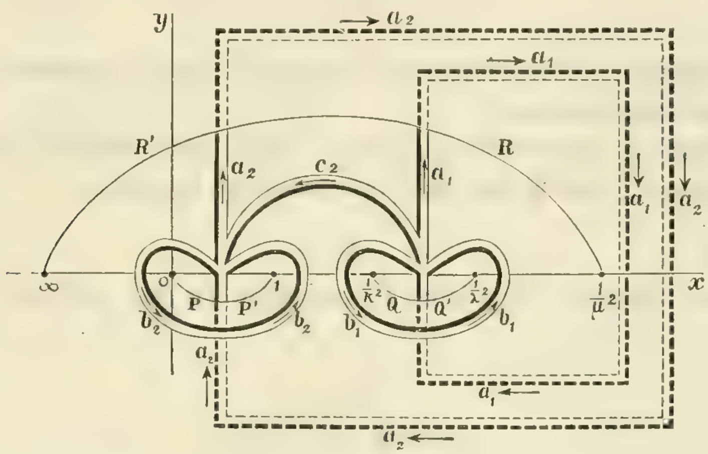
On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\sigma' = -i\sigma.$$

Si, au lieu de décrire de ε en ε' un demi-cercle *au dessus* de Ox, la variable z décrivait un demi-cercle *au dessous* de Ox, la valeur de $\sqrt{z-a}$ au point ε' serait $+i\sigma$.

Il suffira d'appliquer ce résultat successivement à chacun des points de ramification 0, 1, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$ pour avoir les valeurs de s en tous les points de Ox, telles qu'elles sont indiquées dans le tableau des pages précédentes.

Surface de Riemann R_{abc}. Pour rendre la surface de Riemann considérée simplement connexe, il faudra tracer deux coupures a_1 et a_2, deux coupures b_1 et b_2, enfin une coupure c_2. Figurons ces coupures avec la disposition que nous sommes convenus d'adopter (page 31).



La coupure b_1 entoure les points $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ et se trouve sur le feuillet supérieur; la coupure b_2 entoure les points 0, 1 et se trouve sur le feuillet supérieur. Les coupures a_1 et a_2 sont en partie sur un feuillet, en partie sur l'autre: les portions de ces coupures situées sur le feuillet inférieur sont *ponctuées.* Enfin la coupure c_2 va du point de croisement des coupures a_1, b_1 à celui des coupures a_2, b_2.

Appelons $V(z)$ et $W(z)$ les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à la relation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z).$$

Ces intégrales sont, en adoptant les notations de Rosenhain (Mémoire couronné loc. cit. pages 432—435)

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s}\, dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s}\, dz,$$

B, C, B', C' désignant des constantes définies par les équations

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{i\pi}{2} = B\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{s} - C\int_0^1 \frac{zdz}{s}, & \text{o} = B'\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{s} - C'\int_0^1 \frac{zdz}{s}, \\[2ex] \text{o} = B\displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, & \dfrac{i\pi}{2} = B'\displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, \end{cases}$$

où les intégrations sont faites le long de l'axe des quantités réelles et où s est pris positivement.

Ces relations montrent que B et C sont des quantités *purement imaginaires positives,* c'est à dire des quantités de la forme

$$iP,$$

P étant réel positif. En effet la troisième de ces relations écrite sous la forme

$$\text{o} = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s}\,dz$$

montre que $(B - Cz)$ s'annule pour une valeur réelle de z comprise entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$: donc le rapport $\frac{B}{C}$ est réel et supérieur à 1. La première relation (36) montre alors immédiatement que B et C sont de la forme iP, la quantité P étant réelle positive.

De même l'équation

$$\text{o} = \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s}\,dz$$

montre que le rapport $\frac{B'}{C'}$ est réel positif et moindre que 1, et alors l'équation

$$\frac{i\pi}{2} = B'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}$$

montre que B' et C' sont *purement imaginaires négatifs* c'est à dire de la forme

$$-iP,$$

P étant réel et positif.

Les valeurs de ces quatre constantes B, C, B', C' sont d'ailleurs données par ROSENHAIN (loc. cit. page 433).

On a de plus les quatre équations

$$(37)\quad \left|\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\log p = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{B - Cz}{s} dz, & A = \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz, \\ A = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{B' - C'z}{s} dz, & \frac{1}{2}\log q = \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz \end{array}\right.$$

avec $\frac{s}{i} < 0$. (ROSENHAIN, Mémoire couronné, loc. cit. page 435.) Ces intégrations sont encore faites le long de l'axe Ox des quantités réelles, s est alors purement imaginaire et son signe est fixé comme il suit.

Dans la première intégrale qui est égale à $\frac{1}{2}\log p$, la quantité $(B - Cz)$ est purement imaginaire positive d'après ce qui précède; comme la valeur de l'intégrale est *négative*, puisque p est réel positif et moindre que l'unité, il faut prendre pour s une valeur imaginaire telle que $\frac{s}{i}$ soit négatif. Dans la dernière intégrale qui est égale à $\frac{1}{2}\log q$, la quantité $B' - C'z$ est purement imaginaire positive; comme la valeur de l'intégrale est négative puisque q est réel positif et moindre que l'unité, il faut aussi prendre dans cette intégrale $\frac{s}{i}$ négatif. Enfin, dans les deux intégrales qui donnent A, les numérateurs

$$B - Cz\ ,\ B' - C'z$$

restent purement imaginaires négatifs; nous prendrons, dans l'une et l'autre, le signe de s de façon que $\frac{s}{i}$ soit *négatif;* alors A sera positif.

En résumé *dans les quatre intégrales* (37) de la page précédente, nous prenons $\frac{s}{i}$ *négatif.*

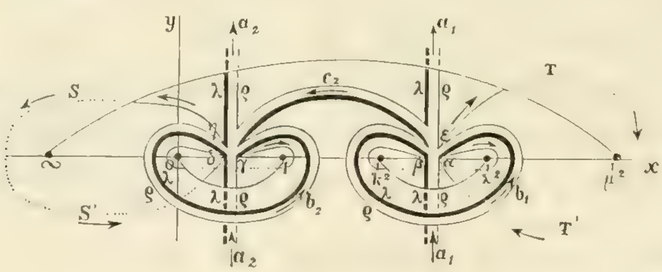
Modules de périodicité des intégrales normales.

Les deux intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont uniformes sur la surface de Riemann R_{abc} figurée à la page 89. Leurs modules de périodicité le long de la coupure c_2 sont nuls, d'après une propriété générale des intégrales abéliennes. (Voyez C. Neumann, loc. cit. p. 216.) Calculons les modules de périodicité de ces intégrales le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2.

Prenons d'abord l'intégrale $V(z)$. Le module de périodicité de $V(z)$ le long de la coupure a_1 est la différence $V(\lambda) - V(\rho)$ constante tout



le long de a_1; ce module est donc en particulier $V(\beta) - V(\alpha)$, α et β étant les points où l'axe Ox rencontre les bords de la coupure a_1. Or cette différence

$$V(\beta) - V(\alpha)$$

est l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise du point α jusqu'au point β sur un contour entourant les deux points $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{k^2}$, comme celui que nous avons figuré; et cette intégrale est égale à

$$2\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s}\, dz$$

prise le long de l'axe Ox sur le feuillet supérieur. Mais cette dernière intégrale est *nulle,* en vertu des équations (36) de la page 90. Donc le module de périodicité de $V(z)$ le long de a_1 est *nul.*

Le long de a_2 le module de périodicité de $V(z)$ est de même $V(\delta) - V(\gamma)$, γ et δ étant les points où l'axe Ox rencontre les bords de la coupure a_2. Il est donc égal à l'intégrale

$$2\int_0^1 \frac{B - Cz}{s}\, dz$$

prise le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s > 0$), c'est à dire à πi.

Pour l'intégrale

$$W(z) = -\int_0^z \frac{(B' - C'z)\, dz}{s}$$

le module de périodicité le long de a_1 est $W(\beta) - W(\alpha)$ c'est à dire l'intégrale

$$-\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s}\, dz$$

prise le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s < 0$) (d'après le tableau de la page 87); ce module est donc πi, car l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s}\, dz$$

où s est *positif* est égale à $\frac{\pi i}{2}$. Enfin le module de périodicité de $W(z)$ le long de a_2 est *nul*.

Passons maintenant aux coupures b_1 et b_2. Le long de b_1 le module de périodicité de $V(z)$ est égal à

$$V(\alpha) - V(\varepsilon)$$

c'est à dire à l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise depuis le point ε jusqu'au point α sur le contour $\varepsilon TT'\alpha$ qui entoure les deux points de ramification $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$.

Cette intégrale se réduit à son tour à

$$2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe Ox des quantités réelles sur le feuillet supérieur, c'est à dire $\frac{s}{i}$ étant pris *positivement* (tableau de la page 87). Or on a

$$A = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

avec $\frac{s}{i}$ *négatif*: donc le module de périodicité de $V(z)$ le long de b_1 est $-2A$.

Le module de périodicité de $W(z)$ le long de la coupure b_1 est égal à l'intégrale

$$-\int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

prise sur le même contour $\varepsilon TT'\alpha$, c'est à dire à

$$-2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{B'-C'z}{s}dz$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles dans le feuillet supérieur $\left(\frac{s}{i}>0\right)$. Comme on a (page 91)

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{B'-C'z}{s}dz=\frac{1}{2}\log q, \qquad \left(\frac{s}{i}<0\right),$$

le module cherché est $\log q$.

Il nous reste à calculer les modules de périodicité de $V(z)$ et $W(z)$ le long de la coupure b_2. Le module de périodicité de $V(z)$ est égal à la différence $V(\partial)-V(\eta)$, c'est à dire à l'intégrale

$$\int_{\eta}^{\partial}\frac{B-Cz}{s}dz$$

prise sur le contour $\eta SS'\partial$ qui entoure les deux points de ramification o et $-\infty$. Cette intégrale se réduit, comme il est bien connu, à

$$2\int_{0}^{-\infty}\frac{B-Cz}{s}dz$$

prise dans le feuillet supérieur le long de l'axe des quantités réelles $\left(\frac{s}{i}>0\right)$. Or on a (page 91)

$$\int_{\infty}^{0}\frac{B-Cz}{s}dz=\frac{1}{2}\log p, \qquad \left(\frac{s}{i}<0\right),$$

le module de périodicité cherché est donc $\log p$.

De même le module de périodicité de $W(z)$ le long de b_2 est

$$-2\int_0^{-\infty}\frac{B'-C'z}{s}dz, \qquad \left(\frac{s}{i}>0\right),$$

c'est à dire (page 91) $-2A$.

En résumé les modules de périodicité des intégrales $V(z)$ et $W(z)$ sont donnés par le tableau suivant

	Sur la coupure a_1	Sur la coupure a_2	Sur la coupure b_1	Sur la coupure b_2
$V(z)$	0	πi	$-2A$	$\log p$
$W(z)$	πi	0	$\log q$	$-2A$

Il importe, en vue de ce qui suit, de calculer les valeurs des intégrales

$$V(z)=\int_0^z\frac{B-Cz}{s}dz, \qquad W(z)=-\int_0^z\frac{B'-C'z}{s}dz$$

aux points de ramification ∞ et $\frac{1}{k^2}$.

Calculons d'abord $V(\infty)$ et $W(\infty)$. Pour aller du point 0 à l'infini sans traverser une coupure, il suffit de suivre l'axe des quantités réelles *négatives* dans le feuillet *inférieur* $\left(\frac{s}{i}<0\right)$. On aura donc

$$V(\infty)=\int_0^{-\infty}\frac{B-Cz}{s}dz, \qquad W(\infty)=-\int_0^{-\infty}\frac{B'-C'z}{s}dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles et $\frac{s}{i}$ étant pris *négativement*. On a donc, d'après les formules (37) de la page 91

$$V(\infty)=-\frac{1}{2}\log p, \qquad W(\infty)=A.$$

Nous avons de même $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$ en allant du point O au point $\frac{1}{k^2}$ le long de l'axe des quantités réelles Ox dans le feuillet inférieur, de façon à passer sous les coupures. Donc

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int_0^1 \frac{B - Cz}{s}\,dz + \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s}\,dz,$$

$$W\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\int_0^1 \frac{B' - C'z}{s}\,dz - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s}\,dz,$$

les intégrations étant faites sur l'axe Ox et s étant pris *négativement* entre o et 1, $\frac{s}{i}$ *positivement* entre 1 et $\frac{1}{k^2}$. Dans ces conditions on a

$$\int_0^1 \frac{B - Cz}{s}\,dz = -\frac{\pi i}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s}\,dz = 0.$$

Puis, d'après des formules dues à Jacobi et reproduites par Rosenhain (Mémoire couronné, loc. cit. page 381, formules 29), on a

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s}\,dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B - Cz}{s}\,dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s}\,dz,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s}\,dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B' - C'z}{s}\,dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s}\,dz$$

ou on prendra partout $\frac{s}{i} > 0$. Donc, en vertu des équations (37) de la page 91 dans lesquels $\frac{s}{i}$ est *négatif*, on aura actuellement:

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz = -\frac{1}{2}\log p - A,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = -A - \frac{1}{2}\log q.$$

Par conséquent

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q.$$

Cela posé les équations différentielles de Jacobi sont les suivantes (d'après Rosenhain, loc. cit. page 432)

$$dv = dV(z_1) + dV(z_2),$$
$$dw = dW(z_1) + dW(z_2)$$

ou

$$dv = \frac{B - Cz_1}{s_1} dz_1 + \frac{B - Cz_2}{s_2} dz_2,$$
$$dw = -\frac{B' - C'z_1}{s_1} dz_1 - \frac{B' - C'z_2}{s_2} dz_2,$$

en faisant, pour abréger,

$$s_1 = \sqrt{(z_1 k\lambda\mu)}, \qquad s_2 = \sqrt{(z_2 k\lambda\mu)}.$$

Dans ces équations on remarquera que le second membre de la seconde a un signe contraire au signe du second membre de la seconde équation de Rosenhain: ce petit changement nous est imposé par la disposition des coupures et le choix des intégrales normales $V(z)$ et $W(z)$ qui en résulte. La variable que nous appelons w est donc égale à celle que Rosenhain appelle w changée de signe. Nous n'en pourrons pas moins appliquer toutes les formules de Rosenhain à condition d'y changer partout le signe de A. Ainsi nous écrirons la fonction $\varphi_{3,3}(v, w)$, (voyez Rosenhain, Mémoire couronné, page 388)

$$\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q - 4mnA + 2mv + 2nw},$$

en mettant $-4mnA$ au lieu de $4mnA$; et de même pour les autres fonctions $\varphi_{r,s}$. En effet, changer le signe de A revient à changer le signe de w, comme on le voit en changeant n en $-n$.

Intégrons maintenant les équations différentielles de JAÇOBI écrites à la page précédente, et prenons pour valeur initiale de z_2 la valeur o et pour valeur initiale de z_1 la valeur $\frac{1}{k^2}$; nous aurons, puisque

$$V(0) = W(0) = 0.$$

$$(38) \qquad \begin{cases} v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{cases}$$

L'inversion de ces équations donne, d'après ROSENHAIN (Mémoire couronné, page 422),

$$(39) \qquad \begin{cases} 1; \quad \dfrac{\varphi^2_{1,0}(v\,,\,w)}{\varphi^2_{0,0}(v\,,\,w)} = -k\lambda\mu z_1 z_2, \\ 3; \quad \dfrac{\varphi^2_{3,1}(v\,,\,w)}{\varphi^2_{0,0}(v\,,\,w)} = \dfrac{\lambda\mu}{k_1\lambda_k\mu_k}(1-k^2z_1)(1-k^2z_2) \end{cases}$$

où nous n'écrivons que la première et la troisième formule de ROSENHAIN. Les fonctions

$$\varphi_{1,0}(v\,,\,w)\,,\ \varphi_{3,1}(v\,,\,w)$$

s'annulent pour

$$v = w = 0, \qquad \text{(ROSENHAIN, loc. cit. p. 416)}$$

de sorte qu'alors on a

$$z_2 = 0, \qquad z_1 = \frac{1}{k^2},$$

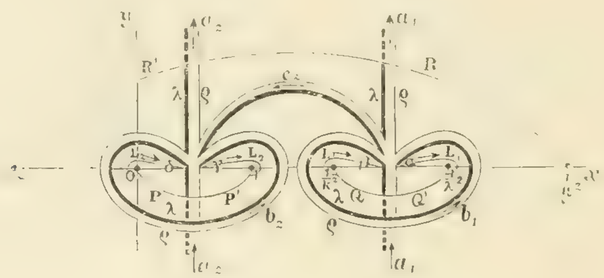
ce qui est bien d'accord avec la façon dont nous avons fixé les valeurs initiales de z_1 et z_2 en écrivant les équations (38).

Reprenons la surface de Riemann de la page 92 et appelons, comme plus haut, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points où l'axe Ox des quantités réelles rencontre les bords des coupures a_1 et a_2. Si l'on suppose $z_2 = \gamma$, $z_1 = \alpha$,

les variables v et w prennent des valeurs v_0 et w_0 données par les équations

$$v_0 = V(\gamma) + V(\alpha) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad w_0 = W(\gamma) + W(\alpha) - W\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Supposons ensuite que z_2 parte de γ, décrive la portion $\gamma 1$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur, la portion $1, 0$ du même axe dans le feuillet



inférieur, et enfin la portion 0δ du même axe dans le feuillet supérieur; supposons en même temps que z_1 parte de α, décrive la portion $\alpha\frac{1}{\lambda^2}$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur, la portion $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$ du même axe dans le feuillet inférieur, et enfin la portion $\frac{1}{k^2}\beta$ du même axe dans le feuillet supérieur. Alors les variables v et w définies par les équations de Jacobi

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

partent des valeurs v_0 et w_0 qui sont *purement imaginaires* (c'est à dire *sans partie réelle*) et varient par une suite continue de valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + i\pi$ et $w_0 + i\pi$. Cela résulte immédiatement de ce que, sur l'axe des quantités réelles, dans l'un et l'autre feuillet, les intégrales

$$\left.\begin{array}{ll}
V(z_2) & = \displaystyle\int_0^{z_2} \frac{B - Cz_2}{s_2}\, dz_2, \\[2ex]
V(z_1) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) & = \displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B - Cz_1}{s_1}\, dz_1, \\[2ex]
W(z_2) & = -\displaystyle\int_0^{z_2} \frac{B' - C'z_2}{s_2}\, dz_2, \\[2ex]
W(z_1) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) & = -\displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B' - C'z_1}{s_1}\, dz_1
\end{array}\right| \begin{array}{l} 0 < z_2 < 1, \\ \frac{1}{k^2} \leq z_1 \leq \frac{1}{\lambda^2}, \end{array}$$

sont purement imaginaires, (pages 90 et suivantes) et de ce que l'on a

$$V(\beta) - V(\alpha) = 0, \qquad V(\delta) - V(\gamma) = \pi i,$$
$$W(\beta) - W(\alpha) = \pi i, \qquad W(\delta) - W(\gamma) = 0.$$

Inversement, comme, par l'inversion, $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$ deviennent des fonctions uniformes de v et w, lorsque v et w varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$, $w_0 + \pi i$, les points z_1 et z_2 restent sur l'axe Ox des quantités réelles et décrivent: le point z_2 un chemin L_2 formé de la droite $\gamma 1$ dans le feuillet supérieur, de la droite $1, 0$ dans le feuillet inférieur, enfin de la droite 0δ dans le feuillet supérieur, et le point z_1 un chemin L_1 formé de la droite $\alpha\frac{1}{\lambda^2}$ dans le feuillet supérieur, de la droite $\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{k^2}$ dans le feuillet inférieur, enfin de la droite $\frac{1}{k^2}\beta$ dans le feuillet supérieur. Nous avons, dans la figure de la page précédente, représenté ces chemins L_1 et L_2 par des contours fermés voisins de l'axe des quantités réelles: d'après ce que nous venons de dire, ces contours doivent être supposés infiniment voisins de cet axe.

La fonction abélienne

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = -k\lambda\mu z_1 z_2$$

admet par rapport à chacune des variables la période πi et reste finie quand v et w partent des valeurs purement imaginaires v_0 et w_0 et varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0+\pi i$ et $w_0+\pi i$. On a donc, par la série de Fourier,

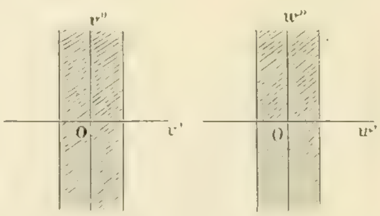
$$(40)\qquad \frac{\varphi_{1.0}^2(v\,,\,w)}{\varphi_{0.0}^2(v\,,\,w)}=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}P_{m,n}e^{-2mv-2nw},$$

m et n étant des *entiers* qui prennent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et $P_{m,n}$ un coefficient indépendant de v et w.

Ce développement est valable pour toutes les valeurs purement imaginaires de v et w: il aura encore lieu pour des valeurs de v et w suffisamment voisines de valeurs purement imaginaires. En d'autres termes, si l'on fait

$$v=v'+iv'',\qquad w=w'+iw''$$

et si l'on représente les variables imaginaires v et w sur deux plans $v'Ov''$ et $w'Ow''$, le développement sera valable pour les valeurs de v



situées dans une bande parallèle à l'axe Ov'' et les valeurs de w situées dans une bande parallèle à l'axe Ow''. Ces deux bandes sont ombrées sur la figure.

Le coefficient $P_{m,n}$ est donné par l'intégrale double

$$(41)\qquad P_{m,n}=-\frac{1}{\pi^2}\int_{v_0}^{v_0+\pi i}dv\int_{w_0}^{w_0+\pi i}\frac{\varphi_{1.0}^2(v\,,\,w)}{\varphi_{0.0}^2(v\,,\,w)}e^{2mv+2nw}dw,$$

l'intégration étant étendue à des valeurs purement imaginaires de v et w, de sorte qu'il suffirait de poser

$$v=v_0+iv'',\qquad w=w_0+iw''$$

pour avoir une intégrale double étendue à *des valeurs réelles v'' et w''*.

Le calcul de cette intégrale double se ramène au calcul des modules de périodicité d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Pour le montrer, faisons-y le changement de variables défini par les équations de JACOBI[1]

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

en prenant pour nouvelles variables z_1 et z_2. Comme nous l'avons expliqué en détail, pour faire varier v et w par valeurs *purement* imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + i\pi$ et $w_0 + i\pi$, il suffit de faire varier z_2 par *valeurs réelles* de γ à 1 dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 100), puis de 1 à 0 dans le feuillet inférieur, puis de 0 à δ dans le feuillet supérieur, et de faire varier z_1 par *valeurs réelles* de α à $\frac{1}{\lambda^2}$ dans le feuillet supérieur, puis de $\frac{1}{\lambda^2}$ à $\frac{1}{k^2}$ dans le feuillet inférieur, enfin de $\frac{1}{k^2}$ à β dans le feuillet supérieur. Ainsi que nous en sommes convenus, nous dirons, pour désigner d'une manière abrégée ces successions de valeurs réelles de z_1 et z_2, que les variables z_1 et z_2 décrivent les contours L_1 et L_2.

Nous devrons alors, en appliquant les règles élémentaires du changement de *variables réelles* dans une intégrale double, remplacer

$$dv\,dw$$

par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_2} - \frac{\partial v}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_1}\right)dz_1 dz_2.$$

Or les équations

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

---

[1] voir page 99.

donnent, puisque

$$V(z)=\int_0^z \frac{B-Cz}{s}\,dz, \qquad W(z)=-\int_0^z \frac{B'-C'z}{s}\,dz,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_1}=\frac{B-Cz_1}{s_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z_2}=\frac{B-Cz_2}{s_2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_1}=-\frac{B'-C'z_1}{s_1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_2}=-\frac{B'-C'z_2}{s_2},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_2}-\frac{\partial v}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_1}=(BC'-CB')\frac{z_2-z_1}{s_1 s_2}.$$

Nous devrons donc faire, dans l'intégrale double,

$$dv\,dw=(BC'-CB')\frac{z_2-z_1}{s_1 s_2}dz_1\,dz_2.$$

Comme dv et dw sont *purement imaginaires positifs,* le produit $dv\,dw$ est *réel négatif;* dans le second membre, le facteur $(BC'-CB')$ est réel positif d'après les valeurs de B, C, B', C', la différence z_2-z_1 est négative puisque z_2 est réel et compris entre 0 et 1, z_1 réel et compris entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, enfin $\frac{dz_1}{s_1}$ et $\frac{dz_2}{s_2}$ sont tous deux positifs d'après la suite des valeurs que prennent z_1 et z_2 dans les deux feuillets, s_1 étant pris positivement quand z_1 croît et négativement quand z_1 décroît, et de même s_2 à l'égard de z_2. Comme on a de plus

$$\frac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}=-k\lambda\mu z_1 z_2,$$

l'intégrale (41) qui donne le coefficient $P_{m,n}$ devient, après le changement de variables,

$$(42)\quad P_{m,n}=\Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{z_1 z_2(z_2-z_1)}{s_1 s_2}e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]}dz_1\,dz_2,$$

la lettre Δ désignant le facteur constant

$$\Delta=\frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC'-CB')$$

et les indices L_1 et L_2 rappelant que les variables réelles z_1 et z_2 doivent décrire sur la surface de Riemann les chemins définis plus haut et appelés L_1 et L_2. Il se présente une petite difficulté à propos de cette transformation, c'est que les éléments des deux intégrales se correspondent bien deux à deux, mais les éléments appartenant à la limite de l'une n'appartiennent pas à la limite de l'autre. Pour montrer la légitimité de la transformation, nous allons vérifier que la nouvelle intégrale (42) est bien équivalente à la première (41). Si l'on pose:

$$z_2 = \frac{1}{k^2}\cos^2 u_1 + \frac{1}{\lambda^2}\sin^2 u_1, \qquad s_2 = \sin u_2 \cos u_2 \,\Delta_2 u_2,$$

$$z_1 = \sin^2 u_2, \qquad s_1 = \sin u_1 \cos u_1 \,\Delta_1 u_1,$$

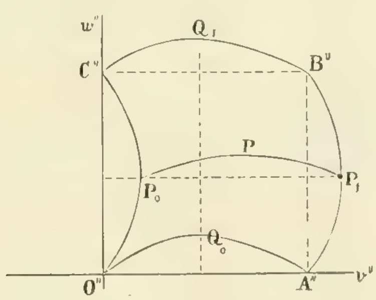
où $\Delta_1 u_1$ et $\Delta_2 u_2$ sont des quantités qui restent réelles et positives pour toutes les valeurs réelles de u_1 et u_2, on fera décrire à z_1 le chemin L_1 et à z_2 le chemin L_2 en faisant varier u_1 et u_2 de 0 à π par valeurs réelles. L'intégrale double (42) deviendra ainsi une intégrale double étendue aux valeurs réelles de u_1 et u_2 telles que

$$0 \leqq u_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq u_2 \leqq \pi.$$

D'autre part, posons comme précédemment

$$v = v_0 + v''i, \qquad w = w_0 + w''i,$$

v'' et w'' étant réels, et désignons par P un point ayant pour coordonnées v'' et w'' par rapport à deux axes rectangulaires $O''v''$, $O''w''$.



On peut alors dire que l'intégrale (41) est étendue à l'aire du carré $O''A''B''C''$ dont les cotés sont égaux à π. Les éléments des intégrales (41) et (42) sont égaux; pour comparer les champs d'intégration, donnons,

dans l'intégrale (42), à u_2 une valeur constante et faisons varier u_1 de o à π: le point P de coordonnées v'' et w'' décrira une courbe P_0PP_1 telle que le segment P_0P_1 soit parallèle à l'axe $O''v''$ et ait pour longueur π; car si, dans les équations (38) de Jacobi, on laisse z_2 constant en faisant décrire à z_1 le contour L_1, w revient à la même valeur et v augmente de πi. A chaque valeur constante donnée à u_2 correspond ainsi une courbe P_0PP_1 dans le plan $v''O''w''$; si l'on fait varier cette valeur constante donnée à u_2 de o à π, la courbe P_0PP_1 se déplace et se déforme d'une manière continue depuis la position $O''Q_0A''$ correspondant à $u_2 = 0$, jusqu'à la position $C''Q_1B''$ correspondant à $u_2 = \pi$, de façon à recouvrir une fois et une seule fois l'aire $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$. Cette aire est limitée par quatre courbes: la courbe $C''Q_1B''$ se déduit de $O''Q_0A''$ en augmentant les ordonnées de cette dernière courbe de π $(Q_0Q_1 = \pi)$, et la courbe $A''P_1B''$ se déduit de $O''P_0C''$ en augmentant les abscisses de cette dernière de π $(P_0P_1 = \pi)$. L'intégrale double (42) est donc égale à l'intégrale double (41) étendue à l'aire curviligne $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$; mais, comme la fonction de v et w qui figure dans l'intégrale (41) admet par rapport à v'' et w'' la période π, la valeur de cette intégrale étendue à l'aire curviligne est égale à la valeur de cette même intégrale étendue au carré $O''A''B''C''$, c'est à dire aux valeurs

$$0 \leq v'' \leq \pi, \qquad 0 \leq w'' \leq \pi.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Il est donc bien établi que la première intégrale double (41) donnant $P_{m,n}$ peut être remplacée par la nouvelle intégrale (42); mais, et c'est là un premier point d'une grande importance, dans cette nouvelle intégrale double, les variables se séparent, *et l'intégrale se ramène à quatre intégrales simples.* En effet, si l'on pose

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1\,dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)}, \qquad \mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2\,dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)},$$

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z_2\,dz_2}{s_2} e^{2m V(z_2) + 2n W(z_2)}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2\,dz_2}{s_2} e^{2m V(z_2) + 2n W(z_2)},$$

on a

$$P_{m,n} = \Delta e^{-2m V\left(\frac{1}{k^2}\right) - 2n W\left(\frac{1}{k^2}\right)} (A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1),$$

ou encore, puisque (d'après pag. 98)

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q,$$

$$(43) \qquad P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} e^{2(m-n)A}(A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1).$$

Le calcul du coefficient $P_{m,n}$ est ainsi ramené au calcul des quatre intégrales définies

$$A_1, A_2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2.$$

Or ces quatre constantes sont les modules de périodicité, le long des coupures a_1 et a_2, des intégrales *de fonctions à multiplicateurs*

$$\int \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \qquad \int \frac{z^2\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}.$$

Pour le montrer, considérons l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

qui est, ainsi que $V(z)$ et $W(z)$, uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann avec les coupures a_1, a_2, b_1, b_2. Cette exponentielle admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les multiplicateurs respectifs

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m} r^{2n}$$

en faisant pour simplifier

$$e^{2A} = r.$$

C'est ce qui résulte immédiatement du tableau des modules de périodicité des intégrales $V(z)$ et $W(z)$ tel que nous l'avons donné à la page 96.

Ainsi, le long de la coupure a_1, on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda)-V(\rho)]+2n[W(\lambda)-W(\rho)]},$$

et, comme le long de a_1,

$$V(\lambda) - V(\rho) = 0, \qquad W(\lambda) - W(\rho) = \pi i,$$

on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = 1, \qquad E(\lambda) = E(\rho);$$

ce qui montre que le multiplicateur m_1 relatif à la coupure a_1 est *l'unité.* On voit de même que le multiplicateur m_2 relatif à la coupure a_2 est *l'unité.*

Le long de la coupure b_1, on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda)-V(\rho)]+2n[W(\lambda)-W(\rho)]}$$

c'est à dire, puisque

$$V(\lambda) - V(\rho) = -2A, \qquad W(\lambda) - W(\rho) = \log q,$$

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = r^{2m} q^{2n};$$

ce qui montre que le multiplicateur n_1 relatif à la coupure b_1 est $r^{2m}q^{2n}$. On voit de même que le multiplicateur n_2 relatif à la coupure b_2 est $p^{2m}r^{2n}$.

Alors la fonction

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} = \frac{z}{s} E(z)$$

est aussi uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann et admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle $E(z)$ à savoir

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m}q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m}r^{2n}.$$

L'intégrale de cette fonction

$$\omega(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} avec les coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2, telle qu'elle est figurée à la page 100. Cette intégrale est de *première espèce, car elle est partout finie.* Le module de périodicité de

cette intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure a_1 est la valeur constante que possède la différence

$$\omega(\lambda) - m_1 \omega(\rho),$$

c'est à dire $\omega(\lambda) - \omega(\rho)$ puisque $m_1 = 1$, le long de la coupure a_1. Or cette différence est

$$\omega(\beta) - \omega(\alpha),$$

α et β désignant comme plus haut les points où l'axe Ox rencontre les deux bords de la coupure a_1. Le module de périodicité de $\omega(z)$ le long de a_1 est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{z\,dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

prise de α à β sur un contour L_1 entourant les deux points $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$, et pouvant être pris infiniment voisin de l'axe des quantités réelles. Ce module de périodicité est donc la constante appelée précédemment A_1 (page 106)

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1\,dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)}.$$

On verra de même que le module de périodicité de cette intégrale $\omega(z)$ le long de a_2 est la constante appelée précédemment A_2 (page 106). Nous appellerons en outre B_1, B_2 et C_2 les modules de périodicité de cette intégrale $\omega(z)$ le long des coupures b_1, b_2, c_2, de sorte que l'on aura

le long de a_1: $\omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_1$,

le long de a_2: $\omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_2$,

le long de b_1: $\omega(\lambda) - n_1\omega(\rho) = B_1$,

le long de b_2: $\omega(\lambda) - n_2\omega(\rho) = B_2$,

le long de c_2: $\omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_2$,

les multiplicateurs m_1 et m_2 étant égaux à 1 et n_1 et n_2 ayant les valeurs

$$n_1 = r^{2m} q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

Les modules de périodicité et les multiplicateurs de l'intégrale de première espèce $\omega(z)$ sont liés par les deux relations suivantes, déduites de la considération des points de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et a_2, b_2, c_2,

$$B_1(1 - m_1) - A_1(1 - n_1) + \quad n_1 C_2 = 0,$$
$$B_2(1 - m_2) - A_2(1 - n_2) - m_2 n_2 C_2 = 0.$$

Ce sont là en effet les relations générales (12) de la page 34 appliquées au cas actuel où le genre est égal à 2. D'après les valeurs des multiplicateurs m_1, m_2, n_1, n_2, on a $1 - m_1 = 0$, $1 - m_2 = 0$ et il vient les deux relations

$$(44) \qquad \begin{aligned} &- A_1(1 - r^{2m} q^{2n}) + r^{2m} q^{2n} C_2 = 0, \\ &- A_2(1 - p^{2m} r^{2n}) - p^{2m} r^{2n} C_2 = 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Psi(z) = \frac{z^2}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)} = \frac{z^2}{s} E(z).$$

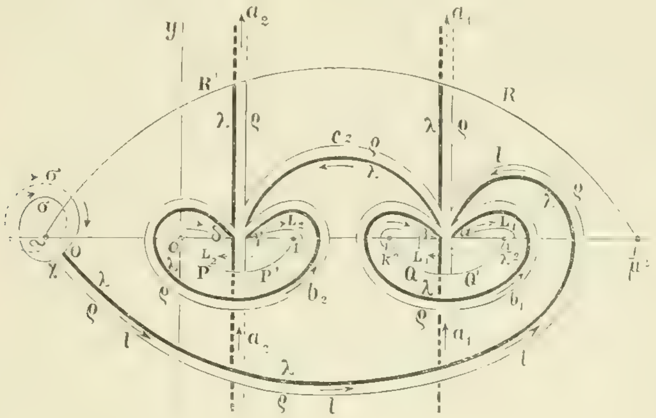
Cette fonction est uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann et admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les mêmes multiplicateurs m_1, m_2, n_1, n_2 que l'exponentielle $E(z)$.

L'intégrale de cette fonction

$$\varpi(z) = \int_0^z \Psi(z)dz = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)}$$

est partout finie excepté à l'infini où elle possède un *point critique logarithmique;* c'est donc une intégrale de *troisième espèce* qui n'est plus uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann comme l'intégrale précédente $\omega(z)$. Cette intégrale $\varpi(z)$ sera uniforme sur la surface R_{abcl} obtenue en ajoutant aux coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 un lacet l commençant et finissant au point

de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et tournant deux fois autour du point ∞, comme le montre la figure schématique suivante où le point ∞ est figuré par un point à distance finie.



On voit, sur cette figure, comment le lacet l se termine par un contour fermé σ tournant deux fois autour du point ∞ en passant d'un feuillet à l'autre chaque fois qu'il traverse la ligne de passage $\frac{1}{\mu^2} RR' \infty$.

L'intégrale $\varpi(z)$ uniforme sur cette surface de Riemann R_{abcl} possède *six* modules de périodicité relatifs aux six coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 et l; les modules de périodicité relatifs aux coupures a_1 et a_2 sont les constantes appelées précédemment $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ (page 106)

$$\mathcal{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2\, dz_1}{s_1} e^{2m\,V(z_1) + 2n\,W(z_1)}, \qquad \mathcal{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2\, dz_2}{s_2} e^{2m\,V(z_2) + 2n\,W(z_2)},$$

les indices L_1 et L_2 signifiant que les intégrales sont prises sur les contours L_1 et L_2 qui entourent le premier les points $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, le second les points 0, 1, infiniment près de l'axe Ox des quantités réelles. Ces constantes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ étant les modules de périodicité de l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z^2\, dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)}$$

le long des coupures a_1 et a_2, nous appellerons en outre $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{L}$ les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures b_1, b_2, c_2, l. De sorte que l'on aura:

$$\begin{array}{ll} \text{le long de la coupure } a_1: & \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{A}_1, \\ \text{le long de la coupure } a_2: & \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{A}_2, \\ \text{le long de la coupure } b_1: & \varpi(\lambda) - n_1\varpi(\rho) = \mathfrak{B}_1, \\ \text{le long de la coupure } b_2: & \varpi(\lambda) - n_2\varpi(\rho) = \mathfrak{B}_2, \\ \text{le long de la coupure } c_2: & \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{C}_2, \\ \text{le long de la coupure } l\,: & \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{L}, \end{array}$$

les multiplicateurs m_1 et m_2 étant égaux à 1 et les multiplicateurs n_1 et n_2 à $r^{2m}q^{2n}$ et $p^{2m}r^{2n}$.

Le point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, l et celui des coupures a_2, b_2, c_2 fournissent chacun une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs, ainsi que nous l'avons montré dans la deuxième partie (page 56 par exemple). Ces relations sont les suivantes

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathfrak{L} + n_1 \mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2 n_2 \mathfrak{C}_2 = 0,$$

où il faudra faire

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m}q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m}r^{2n}.$$

On aura donc

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{n_1\mathfrak{C}_2 - n_1\mathfrak{L}}{1 - n_1}, \qquad \mathfrak{A}_2 = -\frac{n_2\mathfrak{C}_2}{1 - n_2}.$$

D'ailleurs on a trouvé précédemment (page 110 éq. 44)

$$A_1 = \frac{n_1 C_2}{1 - n_1}, \qquad A_2 = -\frac{n_2 C_2}{1 - n_2}.$$

Donc le coefficient $P_{m,n}$ donné par la formule (43) de la page 107, où l'on fait $e^{-2A} = r$,

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1),$$

devient

$$P_{m,n} = -(-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{n_1 n_2}{(1-n_1)(1-n_2)} C_2 \mathfrak{L}$$

ou encore, en remplaçant $\frac{n_2 C_2}{1-n_2}$ par sa valeur $-A_2$ et n_1 par $r^{2m}q^{2n}$,

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta \frac{p^m q^n r^{m+n}}{1-r^{2m}q^{2n}} A_2 \mathfrak{L}. \tag{45}$$

Ce coefficient $P_{m,n}$ est ainsi exprimé à l'aide de A_2 et $\mathfrak{L}$ seulement. Or la constante $\mathfrak{L}$ est aisée à calculer. Cette constante est égale à la différence

$$\varpi(\lambda) - \varpi(\rho)$$

tout le long de la coupure l: elle est donc en particulier égale à

$$\varpi(\theta) - \varpi(\chi),$$

θ et χ étant les points où le contour σ qui entoure deux fois le point ∞ se raccorde avec les bords de la coupure l (Voyez la figure de la page 111). La constante $\mathfrak{L}$ est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_\chi^\theta \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise sur ce contour σ dans le sens marqué par une flèche.

Dans le voisinage du point ∞, c'est à dire pour des valeurs de z dont le module dépasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{(zk\lambda\mu)}} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{k^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\lambda^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\mu^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où en développant en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots\right].$$

La fonction

$$2mV(z) + 2nW(z) = \int_0^z \frac{2mB - 2nB' - (2mC - 2nC')z}{s} dz$$

sera donc, pour ces mêmes valeurs de z, développable en une série de la forme

$$2mV(z) + 2nW(z) = K + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \ldots\right]$$

où K désigne une constante d'intégration et où nous n'avons calculé exactement que le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}$. La constante K est aisée à déterminer: en effet en faisant $z = \infty$, on a

$$2mV(\infty) + 2nW(\infty) = K,$$

et comme (voyez page 96)

$$V(\infty) = -\frac{1}{2}\log p, \qquad W(\infty) = A,$$

on a

$$K = -m\log p + 2nA.$$

D'après cela l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)} = e^{K+\frac{2(2mC-2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{\beta_1}{z}+\ldots\right]},$$

se développe en une série de la forme

$$E(z) = p^{-m}r^{-n}\left[1 + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{\gamma_1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma_2}{z} + \ldots\right)\right],$$

car

$$e^K = e^{-m\log p+2nA} = p^{-m}r^{-n}.$$

En vertu de ces développements de $\frac{1}{s}$ et $E(z)$, on a, pour les mêmes valeurs de z,

$$\frac{z^2}{s}E(z) = \frac{p^{-m}r^{-n}}{k\lambda\mu}\left[\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu}\frac{1}{z} + \frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots\right].$$

La constante $\mathfrak{L}$ est, comme nous l'avons vu, l'intégrale

$$\int_\chi^\theta \frac{z^2}{s}E(z)\,dz$$

prise sur un contour σ entourant deux fois le point ∞ dans le sens négatif (figure de la page 111), c'est à dire sur une circonférence très grande de centre O parcourue deux fois dans le sens positif autour de O. Or cette dernière intégrale est le produit de $4\pi i$ par le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement ci-dessus de $\frac{z^2}{s}E(z)$. On a donc

$$\mathfrak{L} = \frac{16\pi i}{k^2\lambda^2\mu^2}p^{-m}r^{-n}(mC - nC').$$

La constante $\mathfrak{L}$ étant ainsi calculée, l'expression (45) trouvée pour $P_{m,n}$ à la page 113 devient

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i\Delta}{k^2\lambda^2\mu^2}(mC - nC')\frac{q^n r^m}{1 - r^{2m}q^{2n}}A_2$$

ou encore, puisque

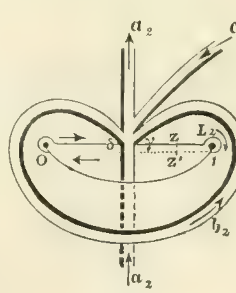
$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC' - CB') \qquad \text{(page 104)},$$

$$(46) \qquad P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC')\frac{A_2}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n}$$

où il ne reste plus d'inconnu que le coefficient A_2 exprimé par l'intégrale définie

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise de γ en δ sur le contour L_2 infiniment voisin du segment de droite $O1$ (figure de la page 111).



Cette dernière intégrale peut s'écrire d'une façon un peu plus commode. Figurons le contour L_2 formé de l'axe des quantités réelles de γ en 1 dans le feuillet supérieur, de 1 en O dans le feuillet inférieur (partie ponctuée) et de O en δ dans le feuillet supérieur. Appelons z un point de l'axe des quantités réelles situé dans le feuillet supérieur entre O et 1, et z' le point du même axe situé au dessous de z dans

le feuillet inférieur, et soient s et s' les valeurs correspondantes de s, de sorte que $s' = -s$. L'intégrale qui donne A_2 pourra s'écrire

$$A_2 = \int_0^{\delta} \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_{\gamma}^{1} \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_{1}^{0} \frac{z'\,dz'}{s'} E(z').$$

Comme l'exponentielle $E(z)$ admet le multiplicateur $m_2 = 1$ le long de la coupure a_2, elle ne change pas quand on franchit cette coupure, et, par conséquent, les deux premières intégrales peuvent être réunies en une seule

$$\int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(z).$$

D'autre part on a le long de la droite $O\delta$

$$z' = z, \qquad s' = -s, \qquad V(z') = -V(z), \qquad W(z') = -W(z),$$

car on a, par exemple

$$V(z') = \int_0^z \frac{B - Cz'}{s'} dz' = -\int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz = -V(z)$$

et de même pour l'intégrale W. Puis le long de la droite $\gamma 1$, on a

$$z' = z, \qquad s' = -s, \qquad V(z') = -\pi i - V(z), \qquad W(z') = -W(z).$$

En effet on a, sur cette portion de l'axe Ox,

$$V(z') = V(1) + \int_1^z \frac{B - Cz'}{s'} dz' = V(1) - \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

et

$$V(z) = V(1) + \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

d'où en ajoutant

$$V(z') + V(z) = 2V(1) = -\pi i;$$

on trouvera de même

$$W(z') + W(z) = 2W(1) = 0;$$

car

$$V(1) = -\frac{\pi i}{2}, \qquad W(1) = 0.$$

Il résulte de là que l'on a entre O et γ

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)}$$

et entre γ et 1

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)},$$

car le facteur $e^{-2m\pi i}$ égale 1. On a ainsi la même expression de $E(z')$ entre O et 1, et la formule qui donne A_2 peut s'écrire

$$A_2 = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_1^0 \frac{z'dz'}{s'} E(z') = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} + \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{-2mV(z)-2nW(z)}.$$

Donc, en posant

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \tag{47}$$

l'intégration étant faite le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur en traversant la coupure a_2, on aura

$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n)$$

et l'expression de $P_{m,n}$ deviendra

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC')\frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} \tag{48}$$

où il n'entre plus que l'intégrale simple rectiligne $\psi(m, n)$ définie ci-dessus.

Le développement de la fonction abélienne considérée est donc

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} \tag{49}$$

$$= \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} (-1)^m (mC - nC')\frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} e^{-2mv-2nw},$$

les constantes B, B', C, C' ayant les valeurs que donne Rosenhain à la page 433 de son Mémoire. Comme le premier membre est une fonction *paire* de v et w, il doit en être de même du second. C'est ce qu'on vérifie immédiatement, car si l'on change v et w en $-v$ et $-w$, puis m et n en $-m$ et $-n$, le second membre ne change pas. En réunissant dans la série les termes qui correspondent à des valeurs de m et n égales et de signes contraires, on aura la série trigonométrique suivante ne contenant que des cosinus

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}$$
$$= \frac{32(BC'-CB')i}{\pi k\lambda\mu}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^m(mC-nC')\frac{\psi(m,n)+\psi(-m,-n)}{r^{-m}q^{-n}-r^m q^n}\cos(2miv+2niw).$$

Il faut remarquer que, dans ces formules, le coefficient $P_{0,0}$ correspondant à $m=n=0$ se présente sous forme illusoire $\frac{0}{0}$. On obtiendra directement ce coefficient en faisant dans la formule (42), page 104, $m=n=0$. On a ainsi

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC'-CB')\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{z_1 z_2(z_2-z_1)}{s_1 s_2}dz_1 dz_2$$

ou bien

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu(BC'-CB')}{\pi^2}(A_1^0\mathfrak{A}_2^0 - A_2^0\mathfrak{A}_1^0)$$

en faisant

$$A_1^0 = \int\limits_{L_1}\frac{z_1 dz_1}{s_1}, \qquad A_2^0 = \int\limits_{L_2}\frac{z_2 dz_2}{s_2},$$

$$\mathfrak{A}_1^0 = \int\limits_{L_1}\frac{z_1^2 dz_1}{s_1}, \qquad \mathfrak{A}_2^0 = \int\limits_{L_2}\frac{z_2^2 dz_2}{s_2}.$$

Le coefficient $P_{0,0}$ est ainsi exprimé à l'aide de quatre constantes dont les deux premières A_1^0 et A_2^0 sont les modules de périodicité de l'intégrale *abélienne*

$$\int\frac{z\,dz}{s}$$

le long des coupures a_1 et a_2, et les deux dernières $\mathfrak{A}_1^0$ et $\mathfrak{A}_2^0$ les modules de périodicité de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{z^2\,dz}{s}$$

le long des mêmes coupures a_1 et a_2. Les deux premières constantes A_1^0 et A_2^0 se calculent immédiatement à l'aide des équations (36) de la page 90; il est inutile d'insister sur ce calcul.

Développement de la fonction abélienne qui donne la somme $z_1 + z_2$ exprimée en v et w.

Nous venons de trouver le développement de $-k\lambda\mu z_1 z_2$ en série trigonométrique: nous formerons de même celui de $-k\lambda\mu(z_1 + z_2)$. En supposant

$$-k\lambda\mu(z_1 + z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} Q_{m,n}\, e^{-2mv-2nw},$$

on trouve, comme pour $P_{m,n}$ (pages 102—104),

$$(50)\quad Q_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{(z_1 + z_2)(z_2 - z_1)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]} dz_1 dz_2,$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant $z_1 z_2$ par $z_1 + z_2$. L'intégrale double ainsi obtenue se décompose en quatre intégrales simples dont deux

$$\mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2\,dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2\,dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)}$$

sont les mêmes que précédemment et dont les deux autres

$$A_1' = \int_{L_1} \frac{dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)},$$

$$A_2' = \int_{L_2} \frac{dz_2}{s_2} e^{2m V(z_2) + 2n W(z_2)}$$

se ramènent facilement à celles que nous avons appelées A_1 et A_2. Avec ces notations, la formule qui donne $Q_{m,n}$ s'écrit

$$Q_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} (\mathfrak{A}_2 A_1' - \mathfrak{A}_1 A_2'),$$

car

$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC' - CB'),$$

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k}\right) = A + \frac{1}{2}\log q.$$

En répétant les calculs qui ont été faits pour la détermination de $P_{m,n}$ on trouvera la formule

$$Q_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC')\frac{A_2'}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n}$$

ne différant de la formule (46) de la page 115 que par le changement de A_2 en A_2'. Cette constante A_2'

$$A_2' = \int_{L_2} \frac{dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

peut s'écrire plus simplement

$$A_2' = \psi'(m, n) + \psi'(-m, -n),$$

en posant

$$\psi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)};$$

il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement fait pour A_2 aux pages 115—117. On aura donc le développement

$$(51) \qquad -k\lambda\mu(z_1+z_2)$$
$$=\frac{16(BC'-CB')i}{\pi k\lambda\mu}\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}(-1)^m(mC-nC')\frac{\psi'(m,n)+\psi'(-m,-n)}{r^{-m}q^{-n}-r^mq^n}e^{-2mv-2nw}$$

que l'on pourrait ordonner suivant les cosinus des arcs $(2miv+2niw)$. Le coefficient $Q_{0,0}$ devra être calculé à part, comme nous l'avons fait pour $P_{0,0}$.

Il est important de remarquer que la fonction $\psi'(m,n)$ peut se ramener à $\psi(m,n)$; cela revient à dire que les constantes A_1' et A_2' peuvent s'exprimer en fonction de A_1 et A_2. En effet, comme

$$V(z)=\int_0^z\frac{B-Cz}{s}dz, \qquad W(z)=-\int_0^z\frac{B'-C'z}{s}dz,$$

l'on a, pour l'exponentielle $E(z)$, l'expression

$$E(z)=e^{2mV(z)+2nW(z)}=e^{2(mB-nB')\int_0^z\frac{dz}{s}-2(mC-nC')\int_0^z\frac{zdz}{s}}$$

d'où l'on déduit, en différentiant,

$$dE(z)=2(mB-nB')\frac{dz}{s}E(z)-2(mC-nC')\frac{zdz}{s}E(z).$$

Intégrons cette identité de 0 à 1, l'intégrale du premier membre sera

$$E(1)-E(0)=(-1)^m-1,$$

car

$$V(0)=W(0)=0, \qquad V(1)=-\frac{i\pi}{2}, \qquad W(1)=0;$$

on aura donc

$$(-1)^m-1=2(mB-nB')\psi'(m,n)-2(mC-nC')\psi(m,n),$$

formule qui exprime $\psi'(m,n)$ en fonction de $\psi(m,n)$ à condition toutefois que $(mB-nB')$ ne soit pas nul. En retranchant de la relation ci-dessus

celle qu'on en déduit par le changement de m et n en $-m, -n$, on a

$$(mB - nB')[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)]$$
$$= (mC - nC')[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)],$$

formule qui permettra d'exprimer $[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)]$ en fonction de $[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)]$, à condition que $(mB - nB')$ ne soit pas nul.

Connaissant ainsi les développements en série de $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$, on écrira immédiatement les développements en séries trigonométriques des cinq fonctions abéliennes

$$\frac{\varphi^2_{1,0}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{2,0}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,1}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,2}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,3}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}$$

qui, d'après les formules données par ROSENHAIN à la page 422 de son Mémoire, s'expriment toutes linéairement en $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$. (Nos variables z_1 et z_2 sont celles que ROSENHAIN appelle x_1 et x_2). Dans ces cinq développements figurera la seule intégrale définie appelée $\psi(m, n)$

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)},$$

le chemin d'intégration étant *rectiligne*.

Il est essentiel de remarquer que les modules des intégrales

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \qquad \psi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

restent finis quand m et n croissent indéfiniment par valeurs positives ou négatives. En effet, ces deux intégrales sont prises le long de l'axe Ox des quantités réelles: or, le long de cet axe les intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont *purement imaginaires,* puisque les constantes B, C, B', C'' le sont (pages 90 et 91); le module de l'élément différentiel de l'intégrale $\psi(m, n)$

$$\frac{z\,dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

est donc égal à

$$\frac{z\,dz}{s}$$

et, le module de l'intégrale $\psi(m, n)$ étant plus petit que la somme des modules des éléments différentiels, on a

$$|\psi(m, n)| \leqq \int_0^1 \frac{z\,dz}{s},$$

où, d'après la notation de M. Weierstrass, nous appelons $|u|$ le module de la quantité imaginaire u. On trouve de même, pour le module de $\psi'(m, n)$

$$|\psi'(m, n)| \leqq \int_0^1 \frac{dz}{s}.$$

Cette remarque permet de voir comment convergent les séries que nous avons obtenues.

Sur un cas particulier dans lequel certains coefficients des séries précédentes se présentent sous forme indéterminée.

Dans la détermination des coefficients $P_{m,n}$ et $Q_{m,n}$ nous avons supposé que le dénominateur de ces coefficients

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

est *différent de zéro.* Ce dénominateur est toujours nul pour $m = n = 0$; aussi faut-il, comme nous l'avons vu, calculer à part les coefficients $P_{0,0}$ et $Q_{0,0}$. Mais, *si l'on ne se trouve pas dans un cas de réduction* des fonctions θ de deux variables à des fonctions θ d'une variable, ce dénominateur

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

ne sera nul que pour $m = n = 0$.

En effet, supposons-le *nul* pour $m = m'$, $n = n'$

$$r^{2m'} q^{2n'} = 1,$$

alors, comme on a posé $r = e^{-2A}$, on aura

$$e^{-4m'A + 2n' \log q} = 1,$$

d'où, A et $\log q$ étant réels,

$$-4m'A + 2n' \log q = 0.$$

Dans ce cas, il y aurait donc *réduction* pour les fonctions θ et les fonctions abéliennes correspondantes. J'en rappelle rapidement la raison. Les fonctions abéliennes précédentes de v et w admettent les couples de périodes suivants:

$$\text{pour } v\colon \quad \log p\,, \quad -2A$$

$$\text{et pour } w\colon \quad -2A\,, \quad \log q.$$

En appelant $F(v, w)$ une de ces fonctions, on aura donc

$$F(v + m \log p - 2nA\,, w - 2mA + n \log q) = F(v, w),$$

m et n désignant des entiers quelconques. Si l'on fait, en particulier, $m = m'$, $n = n'$, la quantité ajoutée à w devient nulle d'après l'hypothèse faite, et il vient

$$F(v + m' \log p - 2n'A\,, w) = F(v, w)$$

comme on a aussi

$$F(v + \pi i, w) = F(v, w);$$

on voit que la fonction abélienne $F(v, w)$ est une fonction *doublement périodique* de v aux périodes $m' \log p - 2n'A$ et πi. Il y a donc réduction, comme nous l'avons annoncé. La quantité

$$m' \log p - 2n'A$$

ne peut pas être nulle en même temps que

$$-2m'A + n' \log q,$$

car on aurait

$$4A^2 - \log p \,.\, \log q = 0$$

et les séries de ROSENHAIN qui définissent les fonctions $\varphi_{r,s}(v\,,\,w)$ seraient divergentes.

Supposons-nous placés dans un cas de réduction de ce genre, c'est à dire supposons

$$-2m'A + n'\log q = 0,$$

m' et n' étant premiers entre eux. La quantité

$$r^{-m}q^{-n} - r^{m}q^{n} = r^{-m}q^{-n}(1 - r^{2m}q^{2n})$$

qui figure au dénominateur du coefficient $P_{m,n}$ dans la série de la page 117, est nulle pour toutes les valeurs de m et n de la forme

$$m = \nu m', \qquad n = \nu n', \qquad (\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty)$$

le numérateur

$$A_2 = \psi(m\,,\,n) + \psi(-m\,,\,-n)$$

est alors nul aussi et le coefficient $P_{m,n}$ se présente sous une forme illusoire $\frac{0}{0}$, qu'il est aisé d'éviter, comme nous allons voir.

En effet, nous avons établi les relations suivantes, pages 110 et 112

$$\begin{aligned}
&-A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n}C_2 = 0,\\
&-A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}C_2 = 0,\\
&-\mathfrak{A}_1(1 - r^{2m}q^{2n}) - r^{2m}q^{2n}\mathfrak{L} + r^{2m}q^{2n}\mathfrak{C}_2 = 0,\\
&-\mathfrak{A}_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}\mathfrak{C}_2 = 0.
\end{aligned}$$

Puisque nous supposons

$$1 - r^{2m}q^{2n} = 0$$

et que $(1 - p^{2m}r^{2n})$ ne peut pas être nul en même temps, comme nous l'avons vu à la page précédente, ces relations donnent

$$C_2 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{L}p^{m}r^{n}}{p^{m}r^{n} - p^{-m}r^{-n}}.$$

Le coefficient $P_{m,n}$, donné par la formule

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1)$$

devient alors

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^{2m} q^{-n} r^{2n-m} \frac{A_1 \mathfrak{L}}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

ou, d'après la valeur de $\mathfrak{L}$ (page 115)

$$\mathfrak{L} = \frac{16\pi i}{k^2 \lambda^2 \mu^2} p^{-m} r^{-n} (mC - nC'),$$

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i \Delta}{k^2 \lambda^2 \mu^2} (mC - nC') \frac{p^m q^{-n} r^{n-m} A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}};$$

cette formule lève l'indétermination qui se présentait avec la première expression de $P_{m,n}$. La constante A_1 est définie par l'intégrale

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z\,dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)},$$

l'intégrale étant prise sur le contour L_1 qui entoure les points $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ figuré à la page 111.

Si l'on pose

$$V_1(z) = V(z) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int_{\frac{1}{k^2}}^{z} \frac{B - Cz}{s}\,dz,$$

$$W_1(z) = W(z) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{z} \frac{B' - C'z}{s}\,dz,$$

en remarquant que

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q,$$

on obtient

$$A_1 = (-1)^m p^{-m} q^n r^{m-n} \int_{L_1} \frac{z\,dz}{s} e^{2m\,V_1(z) + 2n\,W_1(z)}.$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\psi''(m\,,\,n) + \psi''(-\,m\,,\,-\,n)$$

si l'on pose

$$\psi''(m\,,\,n) = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{z\,dz}{s}\, e^{2m\,V_1(z) + 2n\,W_1(z)},$$

l'intégrale étant *rectiligne:* c'est ce qu'on voit comme nous l'avons fait aux pages 116 et 117 pour une intégrale analogue. On aura donc enfin

$$P_{m,n} = \frac{16\pi i\Delta}{k^2\lambda^2\mu^2}(mC - nC')\frac{\psi''(m\,,\,n) + \psi''(-\,m\,,\,-\,n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}.$$

Il serait d'ailleurs aisé de voir que cette formule convient pour toutes les valeurs de m et n; de sorte qu'on a deux formules pour développer

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v\,,\,w)}{\varphi_{0,0}^2(v\,,\,w)}$$

suivant qu'on prend l'ancienne expression de $P_{m,n}$ où celle que nous venons d'obtenir. Ces deux développements se reconnaissent immédiatement comme équivalents à cause de la relation

$$\frac{A_2}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} = p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui se déduit des relations (44) de la page 110 par l'élimination de C_2: puisqu'on a

$$A_2 = \psi(m\,,\,n) + \psi(-\,m\,,\,-\,n),$$
$$A_1 = (-\,1)^m p^{-m} q^n r^{-n+m}[\psi''(m\,,\,n) + \psi''(-\,m\,,\,-\,n)],$$

on aura la relation

$$(-\,1)^m \frac{\psi(m\,,\,n) + \psi(-\,m\,,\,-\,n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} = \frac{\psi''(m\,,\,n) + \psi''(-\,m\,,\,-\,n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui montre l'équivalence des deux développements et permet de lever l'indétermination chaque fois qu'elle se présente.

On pourrait faire les mêmes remarques sur le coefficient $Q_{m,n}$.

Mais nous laissons cette question de côté pour revenir au développement en séries trigonométriques de fonctions abéliennes autres que celles que nous venons de considérer et qui se ramènent à $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$.

Développement d'une fonction de v et w symétrique et entière en z_1 et z_2, s_1 et s_2.

Une fonction symétrique et entière en z_1 et z_2, s_1 et s_2 est une somme de termes de l'une des trois formes suivantes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu\,,\quad s_1 z_1^\nu z_2^\rho + s_2 z_1^\rho z_2^\nu\,,\quad s_1 s_2 (z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu),$$

les exposants ν et ρ étant des entiers positifs ou nuls. Il suffira donc de développer en série chacune de ces trois expressions.

Appellons $f(z_1, z_2)$ l'une de ces expressions et soit

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} R_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

développement valable pour des valeurs purement imaginaires de v et w et des valeurs voisines. On verra, d'après la même méthode que ci-dessus, que le coefficient $R_{m,n}$ est donné par l'intégrale double

$$(52)\quad R_{m,n} = (-1)^m \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} \int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{f(z_1, z_2)(z_1 - z_2)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]} dz_1 dz_2$$

obtenue en remplaçant, dans l'intégrale de la page 104, $z_1 z_2$ par $-\frac{1}{k\lambda\mu} f(z_1, z_2)$. Les indices L_1 et L_2 signifient, comme plus haut, que l'intégrale est étendue aux valeurs réelles de z_1 et z_2 représentées par les contours L_1 et L_2 supposés infiniment voisins de l'axe Ox. Désignons par $E(z)$ l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)};$$

alors en supposant

$$f(z_1, z_2) = z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

nous serons ramenés à calculer l'expression

$$\int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\nu+1}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\rho}}{s_2} E(z_2)dz_2 - \int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\rho}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\nu+1}}{s_2} E(z_2)dz_2$$

$$- \int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\nu}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2)dz_2 + \int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\nu}}{s_2} E(z_2)dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

De même en supposant

$$f(z_1, z_2) = s_1 z_1^{\nu} z_2^{\rho} + s_2 z_1^{\rho} z_2^{\nu}$$

nous aurons, pour calculer $R_{m,n}$, à calculer l'expression

$$\int\limits_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\rho}}{s_2} E(z_2)dz_2 - \int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\rho}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2)dz_2$$

$$+ \int\limits_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\nu} E(z_2)dz_2 - \int\limits_{L_1} z_1^{\nu} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2)dz_2,$$

composée d'intégrales simples.

Enfin si nous supposons

$$f(z_1, z_2) = s_1 s_2 (z_1^{\nu} z_2^{\rho} + z_1^{\rho} z_2^{\nu})$$

nous aurons à calculer l'expression

$$\int\limits_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\rho} E(z_2)dz_2 - \int\limits_{L_1} z_1^{\rho} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2)dz_2$$

$$+ \int\limits_{L_1} z_1^{\rho+1} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\nu} E(z_2)dz_2 - \int\limits_{L_1} z_1^{\nu} E(z_1)dz_1 \int\limits_{L_2} z_2^{\rho+1} E(z_2)dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

Si l'on considère l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\phi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \qquad \nu \geqq 0,$$

les constantes

$$A_{1,\nu} = \int_{L_1} \frac{z_1^\nu dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{2,\nu} = \int_{L_2} \frac{z_2^\nu dz_2}{s_2} E(z_2)$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures a_1 et a_2; de même, les constantes

$$A'_{1,\nu} = \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1, \qquad A'_{2,\nu} = \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2$$

sont les modules de périodicité relatifs aux coupures a_1 et a_2 de l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\varphi_\nu(z) = \int z^\nu E(z) dz. \qquad (\nu \geq 0)$$

Ces fonctions à multiplicateurs

$$\frac{z^\nu}{s} E(z), \; z^\nu E(z)$$

ont d'ailleurs les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle $E(z)$, c'est à dire les multiplicateurs

$$m_1, m_2, n_1, n_2$$

définis précédemment (page 108)

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

On voit que le calcul des coefficients $R_{m,n}$ se ramène au calcul de déterminants de l'une des trois formes suivantes

$$A_{1,\nu} A_{2,\rho} - A_{1,\rho} A_{2,\nu}, \qquad A_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A_{2,\nu} A'_{1,\rho}, \qquad A'_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A'_{1,\rho} A'_{2,\nu}$$

où $\nu \geq 0$, $\rho \geq 0$.

Toutes ces intégrales

$$\psi_\nu = \int \frac{z^\nu}{s} E(z) dz, \qquad \varphi_\nu = \int z^\nu E(z) dz$$

où

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

se ramènent à trois d'entre elles. En effet faisons, pour abréger,

$$E(z) = e^{2m V(z) + 2n W(z)} = e^{\int_0^z \frac{M+Nz}{s} dz}$$

avec

$$M = 2(mB - nB'), \qquad N = -2(mC - nC').$$

L'identité

$$dE(z) = M\frac{E(z)}{s}dz + N\frac{z}{s}E(z)dz$$

donne par l'intégration

$$(53) \qquad E(z) = M\psi_0 + N\psi_1$$

ce qui ramène le calcul de ψ_0 à celui de ψ_1.

Puis l'identité

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1}E(z)dz + M\frac{z^\nu}{s}E(z)dz + N\frac{z^{\nu+1}}{s}E(z)dz$$

où $\nu \geqq 1$ donne par l'intégration

$$(54) \qquad z^\nu E(z) = \nu\varphi_{\nu-1} + M\psi_\nu + N\psi_{\nu+1},$$

formule qui ramène le calcul des fonctions

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

à celui des fonctions

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots.$$

D'autre part, soit

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z) = 2\alpha_0z^5 + \alpha_1z^4 + 2\alpha_2z^3 + \alpha_3z^2 + 2\alpha_4z$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = \frac{5\alpha_0z^4 + 2\alpha_1z^3 + 3\alpha_2z^2 + \alpha_3z + \alpha_4}{s};$$

la différentiation de l'expression $sz^\nu E(z)$ donne

$$d[sz^\nu E(z)] = z^\nu\frac{ds}{dz}E(z)dz + \nu sz^{\nu-1}E(z)dz + sz^\nu(M+Nz)\frac{dz}{s}E(z)$$

ou en réduisant

$$d[sz^\nu E(z)]$$

$$= \frac{(2\nu+5)\alpha_0 z^{\nu+4} + (\nu+2)\alpha_1 z^{\nu+3} + (2\nu+3)\alpha_2 z^{\nu+2} + (\nu+1)\alpha_3 z^{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4 z^\nu}{s} E(z)dz$$

$$+ Mz^\nu E(z)dz + Nz^{\nu+1}E(z)dz.$$

L'intégration de cette identité donne:

$$(55) \qquad sz^\nu E(z) = (2\nu+5)\alpha_0\psi_{\nu+4} + (\nu+2)\alpha_1\psi_{\nu+3} + (2\nu+3)\alpha_2\psi_{\nu+2}$$
$$+ (\nu+1)\alpha_3\psi_{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4\psi_\nu + M\varphi_\nu + N\varphi_{\nu+1};$$

remplaçons, dans cette relation, φ_ν et $\varphi_{\nu+1}$ par leurs expressions déduites de la relation (54) de la page précédente dans laquelle on changerait successivement ν en $\nu+1$ et $\nu+2$:

$$\varphi_\nu = \frac{z^{\nu+1}E(z)}{\nu+1} - \frac{M}{\nu+1}\psi_{\nu+1} - \frac{N}{\nu+1}\psi_{\nu+2},$$

$$\varphi_{\nu+1} = \frac{z^{\nu+2}E(z)}{\nu+2} - \frac{M}{\nu+2}\psi_{\nu+2} - \frac{N}{\nu+2}\psi_{\nu+3}.$$

Nous aurons

$$(56) \qquad \left(sz^\nu - \frac{M}{\nu+1}z^{\nu+1} - \frac{N}{\nu+2}z^{\nu+2}\right)E(z) = (2\nu+5)\alpha_0\psi_{\nu+4}$$

$$+ \left[(\nu+2)\alpha_1 - \frac{N^2}{\nu+2}\right]\psi_{\nu+3} + \left[(2\nu+3)\alpha_2 - \frac{MN}{\nu+1} - \frac{MN}{\nu+2}\right]\psi_{\nu+2}$$

$$+ \left[(\nu+1)\alpha_3 - \frac{M^2}{\nu+1}\right]\psi_{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4\psi_\nu,$$

relation exprimant l'intégrale $\psi_{\nu+4}$ en fonction des quatre précédentes $\psi_{\nu+3}, \psi_{\nu+2}, \psi_{\nu+1}, \psi_\nu$. En faisant successivement dans cette relation

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

on exprimera toutes les fonctions ψ_ν à l'aide des quatre premières

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3;$$

et comme ψ_0 et ψ_1 sont liés par une relation établie précédemment, (re-

lation (53) de la page 131), on pourra exprimer toutes les fonctions ψ_ν à l'aide des trois

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3.$$

Comme chaque fonction φ_ν se ramène aux fonctions ψ_ν par la formule (54) de la page 131, on voit *que toutes les intégrales* appelés φ_ν et ψ_ν, $(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ s'expriment en fonction linéaire à coefficients constants de

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3$$

et de *fonctions connues.*

Ces *fonctions connues* sont de la forme

$$sz^\nu E(z), \quad z^\nu E(z),$$

et leurs modules de périodicité sont *nuls.* Les modules de périodicité d'une quelconque des intégrales φ_ν et ψ_ν sont donc des fonctions *linéaires homogènes* des modules de périodicité correspondants des trois intégrales

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3.$$

Par exemple

$$A_{1,\nu} = aA_{1,1} + a'A_{1,2} + a''A_{1,3},$$

$$A_{2,\nu} = aA_{2,1} + a'A_{2,2} + a''A_{2,3},$$

$$A_{1,\rho} = bA_{1,1} + b'A_{1,2} + b''A_{1,3},$$

$$A_{2,\rho} = bA_{2,1} + b'A_{2,2} + b''A_{2,3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho} = {} & (ab' - ba')(A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}), \\ & + (ab'' - ba'')(A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}), \\ & + (a'b'' - b'a'')(A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}). \end{aligned}$$

Le calcul du déterminant

$$A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho}$$

se trouve ainsi ramené, quels que soient les entiers ν et ρ, à celui des trois déterminants

$$(57) \qquad A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}, \quad A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}, \quad A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}.$$

Il en sera de même des déterminants tels que

$$A_{1,\nu}A'_{2,\rho} - A_{2,\nu}A'_{1,\rho},$$

$$A'_{1,\nu}A'_{2,\rho} \qquad A'_{2,\nu}A'_{1,\rho}$$

qui peuvent aussi figurer dans l'expression de $R_{m,n}$. (Voyez page 130).

On sera donc toujours ramené, par voie récurrente, au calcul des trois déterminants (57) de la page précédente.

Or le premier de ces trois déterminants n'est autre chose que celui qui a été désigné à la page 106 par

$$A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1;$$

en effet on a

$$A_1 = A_{1,1}, \qquad A_2 = A_{1,2}, \qquad \mathfrak{A}_1 = A_{2,1} \qquad \mathfrak{A}_2 = A_{2,2};$$

ce déterminant à été calculé et exprimé à l'aide de l'intégrale définie rectiligne

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(s).$$

Le second des déterminants (57)

$$A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}$$

peut, par les mêmes méthodes, être exprimé à l'aide de la même intégrale définie rectiligne $\psi(m, n)$.

Enfin le troisième de ces déterminants

$$A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}$$

exige pour son expression deux nouvelles intégrales rectilignes analogues à $\psi(m, n)$

$$\chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{s} E(z), \qquad \varpi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3\,dz}{s} E(z).$$

En effet les deux intégrales

$$\psi_2(z) = \int^{z} \frac{z\,dz}{s} E(z), \qquad \psi_3(z) = \int^{z} \frac{z\,dz}{s} E(z)$$

dont la première n'est autre chose que l'intégrale appelée précédemment $\varpi(z)$ (pages 110 et suivantes)

$$\varpi(z) = \int^{z} \frac{z^2 dz}{s} E(z)$$

sont des intégrales de troisième espéce de fonctions aux multiplicateurs

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m} r^{2n};$$

ces intégrales ont pour point critique logarithmique le point ∞. Elles sont uniformes sur la surface de Riemann R_{abcl} figurée à la page 111. Appelons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ les modules de périodicité de ces intégrales ψ_2 et ψ_3 le long de la coupure l; nous avons calculé $\mathfrak{L}$ précédemment aux pages 113—115; en suivant la même méthode on aura $\mathfrak{L}'$. Le développement que nous avons établi à la page 114

$$\frac{z^2}{s} E(z) = \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \left[\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta_0}{z} + \frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots \right]$$

donne immédiatement

$$\frac{z^3}{s} E(z) = \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \left[z^{\frac{1}{2}} + \delta_0 + \frac{\delta_1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta_2}{z} + \ldots \right];$$

alors

$$\mathfrak{L}' = 4\pi i \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \delta_2 .$$

Nous avons établi les deux relations suivantes entre les modules de périodicité $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{L}$ de l'intégrale $\psi_2(z)$ ou $\varpi(z)$, modules que nous appelons ici, pour plus de symétrie dans les formules, $A_{1,2}, A_{2,2}, C_{2,2}, \mathfrak{L}$ (voyez page 112)

$$A_{1,2} = \frac{n_1 C_{2,2} - n_1 \mathfrak{L}}{1 - n_1}, \qquad A_{2,2} = -\frac{n_2 C_{2,2}}{1 - n_2}.$$

On aura de même, en appelant

$$A_{1,3}, \; A_{2,3}, \; C_{2,3}, \; \mathfrak{L}'$$

les modules de périodicité de $\psi_3(z)$

$$A_{1,3}=\frac{n_1 C_{2,3}-n_1\mathfrak{L}'}{1-n_1},\qquad A_{2,3}=-\frac{n_2 C_{2,3}}{1-n_2}.$$

D'où l'on tire

$$A_{1,2}A_{2,3}-A_{2,2}A_{1,3}=\frac{n_1 n_2}{(1-n_1)(1-n_2)}(\mathfrak{L}C_{2,3}-\mathfrak{L}'C_{2,2})$$

ou encore

$$A_{1,2}A_{2,3}-A_{2,2}A_{1,3}=\frac{n_1}{1-n_1}A_{2,2}\mathfrak{L}'-\frac{n_2}{1-n_2}A_{2,3}\mathfrak{L}.$$

Le calcul du troisième des déterminants (57) est ainsi ramené au calcul des deux modules de périodicité

$$A_{2,2}=\int_{L_2}\frac{z^2\,dz}{s}E(z),\qquad A_{2,3}=\int_{L_2}\frac{z^3\,dz}{s}E(z).$$

Si l'on pose

$$\chi(m\,,n)=\int_0^1\frac{z^2\,dz}{s}E(z),\qquad \varpi(m\,,n)=\int_0^1\frac{z^3\,dz}{s}E(z),$$

les intégrales étant rectilignes, on voit, comme aux pages 115—117, que l'on a

$$A_{2,2}=\chi(m\,,n)+\chi(-m\,,-n),\qquad A_{2,3}=\varpi(m\,,n)+\varpi(-m\,,-n).$$

En résumé, le calcul des coefficients des développements en série trigonométrique d'une fonction abélienne exprimée par une fonction symétrique entière de z_1 et z_2, s_1 et s_2, se ramène toujours par des opérations algébriques élémentaires au calcul des trois intégrales définies rectilignes

$$\psi(m\,,n)=\int_0^1\frac{z\,dz}{s}E(z),\qquad \chi(m\,,n)=\int_0^1\frac{z^2\,dz}{s}E(z),\qquad \varpi(m\,,n)=\int_0^1\frac{z^3\,dz}{s}E(z)$$

où

$$E(z)=e^{2m\,V(z)+2n\,W(z)}.$$

Il serait, par exemple, bien facile d'appliquer cette méthode générale au développement de $s_1 s_2$ ou de s_1+s_2.

On peut, par les mêmes méthodes, calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes de l'une des deux formes

$$R(s_1, z_1)R(s_2, z_2), \quad R(s_1, z_1) + R(s_2, z_2),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z. Pour que ces développements soient convergents comme les précédents, il faut et il suffit que $R(s, z)$ reste finie quand z varie par valeurs réelles de 0 à 1 et de $\frac{1}{k^2}$ à $\frac{1}{\lambda^2}$.

Développements de fonctions non symétriques en z_1, s_1 *et* z_2, s_2.

Les méthodes que nous avons appliquées au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de e^{2v} et e^{2w}, peuvent, dans certains cas, donner les coefficients du développement en séries trigonométriques de fonctions *non-symétriques* en z_1, s_1 et z_2, s_2, fonctions qui s'expriment par des *racines carrées* de fonctions abéliennes.

Prenons, par exemple, la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2,$$

où nous supposons z_2 réel et compris entre 0 et 1, z_1 réel et compris entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$. Cette fonction s'exprime par une racine carrée de fonctions abéliennes, car

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} = \frac{k\lambda\mu}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}},$$

la racine étant prise positivement. Nous avons vu que, si les variables v et w partent de valeurs *purement imaginaires* v_0 et w_0 et varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$, $w_0 + \pi i$, les variables z_2 et z_1 oscillent sur l'axe des quantités réelles la première z_2 entre 0 et 1, la seconde z_1 entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$ de façon à décrire les lacets appelés

L_2 et L_1. (Page 100.) Lorsque v et w varient ainsi de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$ et $w_0 + \pi i$, la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2$$

est donc uniforme, finie et continue. Elle est pour ces valeurs *purement imaginaires* de v et w développable en une série de la forme

$$-k\lambda\mu \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} S_{m,n} e^{-2mv-2nw}$$

avec

$$S_{m,n} = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} \int_{v_0}^{v_0+\pi i} dv \int_{w_0}^{w_0+\pi i} \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} e^{2mv+2nw} dw.$$

En faisant, dans cette intégrale double, le changement de variables défini par les équations d'inversion de JACOBI

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

on trouve, comme pour $P_{m,n}$ (pages 102—104),

$$S_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{z_1 z_2 dz_1 dz_2}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]},$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant $z_1 z_2$ par $\frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1}$. L'on aura donc, d'après les valeurs des intégrales $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$,

$$S_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} A_1 A_2,$$

où A_1 et A_2 désignent comme précédemment (pages 106 et suivantes) les intégrales

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)}, \qquad A_2 = \int_{L_2} \frac{z_2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)},$$

dont les valeurs sont liées par les relations (44) de la page 110:

$$-A_1(1-r^{2m}q^{2n})+r^{2m}q^{2n}C_2=0,$$
$$-A_2(1-p^{2m}r^{2n})-p^{2m}r^{2n}C_2=0,$$

qui donnent par l'élimination de C_2

$$A_1=-q^np^{-m}r^{m-n}\frac{p^{-m}r^{-n}-p^mr^n}{r^{-m}q^{-n}-r^mq^n}A_2.$$

On a donc

$$S_{m,n}=(-1)^m k\lambda\mu\frac{BC'-CB'}{\pi^2}\cdot\frac{p^mr^n-p^{-m}r^{-n}}{r^{-m}q^{-n}-r^mq^n}A_2^2,$$

et comme

$$A_2=\psi(m,n)+\psi(-m,-n),$$

on voit que le coefficient $S_{m,n}$ est encore exprimé à l'aide de l'intégrale définie appelée $\psi(m,n)$.

On trouverait de même les développements de fonctions de la forme

$$\frac{f(s_1,z_1;s_2,z_2)}{z_2-z_1}$$

où le numérateur $f(s_1,z_1;s_2,z_2)$ désigne une fonction symétrique entière de s_1,z_1 et s_2,z_2.

Sans insister davantage sur ces développements, j'arrive à une autre question intéressante, à savoir celle de l'*inversion* d'une intégrale ultra-elliptique, $\frac{1}{i}V(z)$ par exemple, pour *des valeurs réelles de z et de l'intégrale.*

Les intégrales définies appelées $\psi(m,n)$, $\chi(m,n)$, $\varpi(m,n)$ se présentent dans une autre espèce de problèmes qui se posent souvent en mécanique rationelle.

Soit, pour fixer les idées, la relation

$$(58)\qquad t=\frac{1}{i}\int_0^z\frac{B-Cz}{s}dz$$

où B et C sont les mêmes constantes purement imaginaires que précédemment et où s est lié à z par la même relation que ci-dessus

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z).$$

Supposons que t désigne le *temps* et z une *variable réelle* servant à fixer la position d'un mobile au temp t. Alors les variables z et t doivent rester réelles, et t aller toujours en croissant.

Dans ces conditions, comme $\frac{B}{i}$ et $\frac{C}{i}$ sont des constantes réelles positives

$$\frac{B}{i} > \frac{C}{i},$$

z croîtra de 0 à 1, le radical

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

étant pris positivement; puis z décroîtra de 1 à 0, le même radical s étant pris négativement; puis z croîtra de nouveau de 0 à 1, s étant positif; et ainsi de suite indéfiniment. Nous avons vu (page 90) que l'on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{B - Cz}{s}\,dz;$$

d'après cela, si dans la relation (58) de la page précédente

$$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s}\,dz \tag{58}$$

on veut prendre le temps t comme variable *indépendante* et la variable réelle z comme fonction de t, on voit que z est une fonction réelle de t admettant la période π et restant finie (comprise entre 0 et 1) pour toutes les valeurs du temps t. On pourra donc développer z en série trigonométrique de la forme

$$z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p_m e^{-2mti}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de t. La connaissance des coefficients de ce développement permettrait donc de réaliser, à ce point de vue spécial, l'*inversion* de l'intégrale (58). Le coefficient p_m est donné par l'intégrale définie

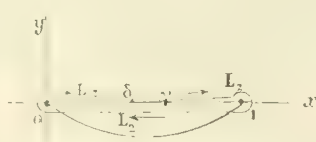
$$p_m = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} z e^{2mti}\,dt,$$

ou, en faisant, dans cette intégrale, le changement de variable

$$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s}\,dz = \frac{1}{i}V(z),$$

$$p_m = \frac{1}{i\pi}\int_{L_2} \frac{(B - Cz)z\,dz}{s}\, e^{2mV(z)},$$

l'indice L_2 signifiant comme précédemment (page 101 et figure de la page 100) que le point z décrit un chemin formé de la portion $\gamma 1$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s > 0$), de la portion $1, 0$ du même axe dans le feuillet inférieur ($s < 0$), enfin de la portion 0δ du même axe dans le feuillet supérieur ($s > 0$); δ étant infiniment voisin de γ. Pour pouvoir figurer ce chemin L_2, nous l'avons représenté non comme confondu avec le segment 01 (ce qu'il est en réalité), mais comme infiniment rapproché de ce segment.



Nous avons vu précédemment que l'on a

$$\int_{L_2} \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} = \varphi(m, n) + \varphi(-m, -n),$$

$$\int_{L_2} \frac{z^2\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} = \chi(m, n) + \chi(-m, -n).$$

On aura donc, pour déterminer p_m, l'équation

$$p_m = \frac{B}{\pi i}[\varphi(m, 0) + \varphi(-m, 0)] - \frac{C}{\pi i}[\chi(m, 0) + \chi(-m, 0)],$$

où

$$\psi(m\,,\,0) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)},$$

$$\chi(m\,,\,0) = \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)}.$$

On est donc bien ramené, pour calculer p_m, aux mêmes intégrales que pour développer les fonctions abéliennes précédentes en séries trigonométriques.

On verra de même que si l'on veut développer non seulement z mais z^ν ou bien sz^ν (ν entier positif) en série trigonométrique ordonnée par rapport aux puissances de e^{2ti}, le calcul des coefficients se ramène à celui des trois intégrales

$$\psi(m\,,\,0)\,,\ \chi(m\,,\,0)\,,\ \varpi(m\,,\,0)$$

en vertu des formules de réduction des pages 131 et suivantes.

On arrive donc à cette conclusion remarquable que, si l'on sait développer en séries trigonométriques les fonctions abéliennes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

on sait en même temps faire l'inversion de l'intégrale ultraelliptique

$$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s}\,dz$$

(z et t réels) et développer

$$z\,,\ z^2,\ \ldots,\ z^\nu,\ \ldots,\ s\,,\ sz\,,\ sz^2,\ \ldots,\ sz^\nu,\ \ldots$$

en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de e^{2ti}.

Ces résultats s'étendraient sans peine à l'inversion d'une intégrale ultraelliptique de la forme plus générale

$$t = \frac{\nu}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s}\,dz + \frac{\rho}{i}\int_0^z \frac{B' - C'z}{s}\,dz,$$

ν et ρ étant des entiers tels que l'expression

$$\nu(B - Cz) + \rho(B' - C'z)$$

ne s'annule pas entre o et 1.

Les intégrales $\psi(m, n)$, $\chi(m, n)$, $\varpi(m, n)$ comprennent comme cas très-particuliers les fonctions de Bessel.

Dans les calculs précédents (pages 131 et suivantes) relatifs à la réduction des intégrales de la forme

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu\, dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}, \qquad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu dz\, e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

où ν est un entier positif ou nul, à trois d'entre elles ψ_1, ψ_2, ψ_3, nous avons supposé m et n entiers, d'après la nature de la question qu'il s'agissait de résoudre. Les formules de réduction que nous avons établies sont les mêmes lorsque m et n ne sont plus des nombres entiers, mais désignent des *constantes quelconques.*

On en conclut que, quels que soient m et n, entiers ou non, les intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{z^\nu\, dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}, \qquad \int_0^1 z^\nu dz\, e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

se ramènent aux trois que nous avons appelées

$$\psi(m, n), \; \chi(m, n), \; \varpi(m, n).$$

Ces dernières intégrales sont des fonctions de m et n qui comprennent comme cas limites les fonctions de Bessel.

Par exemple m et n étant quelconques, l'expression

$$2m V(z) + 2n W(z)$$

est de la forme

$$\int_0^z \frac{\alpha + \beta z}{s} dz$$

α et β désignant des constantes arbitraires linéaires et homogènes en m et n. L'intégrale $\psi(m, n)$ devient alors

$$\int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{\int_0 \frac{\alpha+\beta z}{s} dz}$$

où

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z).$$

Supposons, comme cas limite,

$$k = \lambda = \mu = 0, \qquad s^2 = z(1-z);$$

l'intégrale ci-dessus où l'on fait

$$z = \sin^2\varphi, \qquad s = \sin\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{dz}{s} = 2d\varphi$$

prend la forme

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \,.\, d\varphi \,.\, e^{(2\alpha+\beta)\varphi - \frac{\beta}{2}\sin 2\varphi},$$

intégrale qui dans l'hypothèse

$$2\alpha + \beta = \nu i, \quad (\nu \text{ entier})$$

se ramène immédiatement à des fonctions de Bessel de la variable $\frac{i\beta}{2}$. (Voyez, par exemple, le Traité de Todhunter: *On Laplace's, Lamé's and Bessel's Functions* (pages 287 et suivantes).

La méthode employée dans le chapitre précédent s'applique aux fonctions abéliennes les plus générales. Dans un supplément, nous montrons en particulier comment cette méthode s'étend aux fonctions abéliennes qui naissent de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques d'un genre quelconque. Puis nous indiquons comment nos recherches sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs peuvent être étendues à l'étude de l'intégrale générale d'une classe importante d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Supplément.

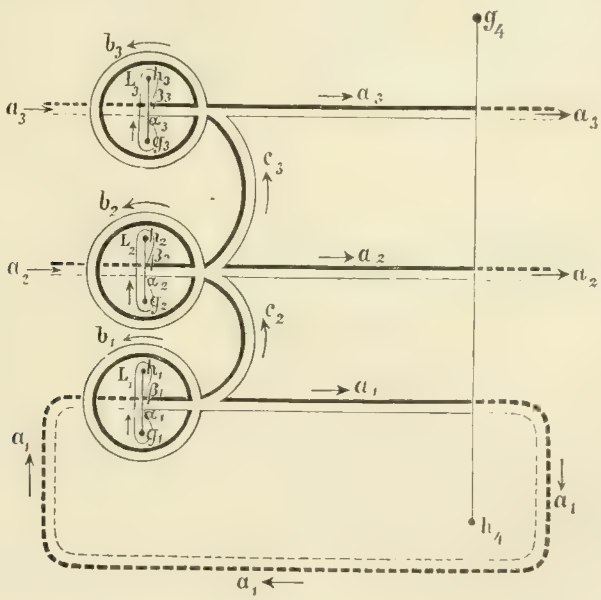
Développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques.

La méthode que nous avons suivie dans le premier cahier, pour calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales ultraelliptiques, peut être étendue à des intégrales hyperelliptiques dont le genre p est quelconque.

C'est ce que nous allons montrer en supposant, pour simplifier, $p = 3$ et en partant de la relation algébrique

$$s^2 = (g_1 - z)(h_1 - z)(g_2 - z)(h_2 - z)(g_3 - z)(h_3 - z)(g_4 - z)(h_4 - z)$$

où $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$ désignent des constantes inégales. La surface R_{abc} de Riemann correspondant à cette relation se trouve figurée dans l'Ouvrage de C. Neumann (loc. cit. page 179); nous la reproduisons ici en donnant aux coupures c_2 et c_3 la disposition particulière que nous sommes convenus d'adopter:



Soient alors

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à cette surface de Riemann, $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3$ étant des constantes convenables. Les modules de périodicité de ces intégrales sont (C. Neumann, page 246) donnés par le tableau suivant

Coupures	$\to a_1$	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
$w_1(z)$	πi	0	0	b_{11}	b_{12}	b_{13}
$w_2(z)$	0	πi	0	b_{21}	b_{22}	b_{23}
$w_3(z)$	0	0	πi	b_{31}	b_{32}	b_{33}

avec

$$b_{jk} = b_{kj}.$$

Considérons les équations de Jacobi

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3), \\ u_2 &= w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3), \\ u_3 &= w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3), \end{aligned} \tag{1}$$

définissant z_1, z_2, z_3 en fonction de u_1, u_2, u_3.

Appelons α_1 et β_1 les points où la droite $g_1 h_1$ rencontre les deux bords de la coupure a_1 (voyez page 145), α_2 et β_2 les points où la droite

g_2h_2 rencontre les deux bords de la coupure a_2, α_3 et β_3 les points où la droite g_3h_3 rencontre les deux bords de la coupure a_3. Alors, d'après les valeurs des modules de périodicité, on a

$$w_1(\beta_1) - w_1(\alpha_1) = \pi i, \quad w_2(\beta_1) - w_2(\alpha_1) = 0, \quad w_3(\beta_1) - w_3(\alpha_1) = 0,$$

$$w_1(\beta_2) - w_1(\alpha_2) = 0, \quad w_2(\beta_2) - w_2(\alpha_2) = \pi i, \quad w_3(\beta_2) - w_3(\alpha_2) = 0,$$

$$w_1(\beta_3) - w_1(\alpha_3) = 0, \quad w_2(\beta_3) - w_2(\alpha_3) = 0, \quad w_3(\beta_3) - w_3(\alpha_3) - \pi i.$$

Supposons que les variables z_1, z_2, z_3 partent respectivement des points α_1, α_2, α_3 et décrivent des contours L_1, L_2, L_3 aboutissant aux points β_1, β_2, β_3, ces contours étant choises de telle façon que les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \quad u_2 - (u_2)_0, \quad u_3 - (u_3)_0$$

varient par valeurs *purement imaginaires* de 0 à πi quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours L_1, L_2, L_3. Par exemple, dans le cas particulier où les constantes g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4 sont réelles, et rangées par ordre de grandeur, les contours L_1, L_2, L_3 sont infiniment voisins des segments de droites $\alpha_1 g_1$, $\alpha_2 g_2$, $\alpha_3 g_3$ dans le feuillet supérieur, g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3 dans le feuillet inférieur, $h_1\beta_1$, $h_2\beta_2$, $h_3\beta_3$ dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 145). C'est sur ce cas particulier que nous exposerons la méthode qui s'applique immédiatement au cas général, à condition que les contours L_1, L_2, L_3 ne se coupent pas.

Développement de la fonction abélienne $z_1z_2z_3$.

La fonction abélienne

$$z_1z_2z_3$$

est une fonction uniforme de u_1, u_2, u_3 aux périodes πi par rapport à chaque variable. Cette fonction sera pour les valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \quad u_2 - (u_2)_0, \quad u_3 - (u_3)_0$$

développable en une série trigonométrique de la forme:

$$z_1 z_2 z_3 = \sum P_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

où la sommation est étendue aux valeurs entières des indices $\nu_1\nu_2\nu_3$ de $-\infty$ à $+\infty$. Le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est donné par la formule

$$(2) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{1}{(\pi i)^3} \int_{(u_1)_0}^{(u_1)_0+\pi i} du_1 \int_{(u_2)_0}^{(u_2)_0+\pi i} du_2 \int_{(u_3)_0}^{(u_3)_0+\pi i} du_3 \,.\, z_1 z_2 z_3 \,.\, e^{2\nu_1 u_1 + 2\nu_2 u_2 + 2\nu_3 u_3};$$

les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

prenant, dans l'intégrale triple, des valeurs purement imaginaires.

Suivant la méthode employée dans la troisième partie, faisons dans cette intégrale triple (2) le changement de variables défini par les équations de Jacobi

$$u_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3),$$

$$u_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3),$$

$$u_3 = w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3)$$

et prenons pour nouvelles variables z_1, z_2, z_3. Comme ce changement de variables se ramène immédiatement à un changement de variables réelles, puisque le long des contours L_1, L_2, L_3 les variables z_1, z_2, z_3 peuvent être regardées comme dépendant chacune d'une variable réelle, il suffit, d'après les régles élémentaires bien connues, de remplacer $du_1 du_2 du_3$ par

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} dz_1 dz_2 dz_3,$$

la notation

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)}$$

désignant le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \frac{\partial u_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1} & \frac{\partial u_2}{\partial z_2} & \frac{\partial u_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z_1} & \frac{\partial u_3}{\partial z_2} & \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \end{vmatrix}.$$

Comme nous avons posé

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

nous avons, en appelant s_1, s_2, s_3 les valeurs que prend s pour $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$,

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} = \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} p_1 + q_1 z_1 + r_1 z_1^2 & p_1 + q_1 z_2 + r_1 z_2^2 & p_1 + q_1 z_3 + r_1 z_3^2 \\ p_2 + q_2 z_1 + r_2 z_1^2 & p_2 + q_2 z_2 + r_2 z_2^2 & p_2 + q_2 z_3 + r_2 z_3^2 \\ p_3 + q_3 z_1 + r_3 z_1^2 & p_3 + q_3 z_2 + r_3 z_2^2 & p_3 + q_3 z_3 + r_3 z_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3}(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1),$$

où Δ désigne une constante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Posons en outre

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)};$$

alors l'équation (2) qui donne $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ devient

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int\limits_{L_1} dz_1 \int\limits_{L_2} dz_2 \int\limits_{L_3} \frac{z_1 z_2 z_3}{s_1 s_2 s_3} E(z_1) E(z_2) E(z_3) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} dz_3,$$

les indices L_1, L_2, L_3 dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les variables $z_1 z_2 z_3$ doivent prendre la suite des valeurs figurées par les contours L_1, L_2, L_3 définis à la page 147.

L'intégrale triple ainsi obtenue se décompose en intégrales simples. Nous pouvons l'écrire en faisant entrer les facteurs z_1, z_2, z_3 dans le déterminant

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \int\limits_{L_3} \frac{E(z_1) E(z_2) E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ z_3 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Considérons les intégrales simples

$$A_{\nu 1} = \int\limits_{L_1} \frac{z_1^\nu E(z_1)}{s_1} dz_1,$$

$$A_{\nu 2} = \int\limits_{L_2} \frac{z_2^\nu E(z_2)}{s_2} dz_2,$$

$$A_{\nu 3} = \int\limits_{L_3} \frac{z_3^\nu E(z_3)}{s_3} dz_3$$

où ν *est un entier positif ou nul.* L'expression ci-dessus de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ deviendra

$$(3) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

et se trouvera ramenée à un déterminant de neuf intégrales simples; ce qui constitue la généralisation immédiate de la formule trouvée à propos des intégrales ultraelliptiques.

L'intégrale

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu E(z)}{s} dz$$

est une intégrale de fonction à multiplicateurs; et les constantes

$$A_{\nu 1}\ ,\ A_{\nu 2}\ ,\ A_{\nu 3}$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures a_1, a_2, a_3.

En effet l'exponentielle

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} figurée à la page 145. Les valeurs que prend cette exponentielle aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un facteur constant qui se déduit immédiatement du tableau des modules de périodicité de $w_1(z), w_2(z), w_3(z)$. Appelons, comme dans la théorie génerale, m_1, m_2, m_3 les multiplicateurs de $E(z)$ le long des coupures a_1, a_2, a_3, et n_1, n_2, n_3 ses multiplicateurs le long de b_1, b_2, b_3. Nous aurons

$$(4)\quad \begin{cases} m_1 = e^{2\nu_1\pi i} = 1, & m_2 = e^{2\nu_2\pi i} = 1, & m_3 = e^{2\nu_3\pi i} = 1, \\ n_1 = e^{2\nu_1 b_{11} + 2\nu_2 b_{21} + 2\nu_3 b_{31}}, & n_2 = e^{2\nu_1 b_{12} + 2\nu_2 b_{22} + 2\nu_3 b_{32}}, & n_3 = e^{2\nu_1 b_{13} + 2\nu_2 b_{23} + 2\nu_3 b_{33}}. \end{cases}$$

La fonction

$$\frac{z^\nu}{s} E(z),$$

ν étant un entier positif ou nul, admet les mêmes multiplicateurs que $E(z)$; cette fonction est, pour des valeurs très grandes de z, développable en une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z, et le premier terme du développement est de l'ordre de

$$z^{\nu - 4}.$$

Donc les intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z) = \int \frac{\mathrm{I}}{s} E(z)dz, \qquad \psi_1(z) = \int \frac{z}{s} E(z)dz, \qquad \psi_2(s) = \int \frac{z^2}{s} E(z)dz,$$

sont de *première espèce* comme restant partout finies; tandis que

$$\psi_3(s) = \int \frac{z^3}{s} E(z)dz$$

est de *troisième espèce,* car cette intégrale a pour points critiques logarithmiques les deux points j_0 et j_1 situés à l'infini, le premier dans le feuillet supérieur, le second dans le feuillet inférieur.

Appelons

$$A_{\nu 1}\,,\ A_{\nu 2}\,,\ A_{\nu 3}\,,\ B_{\nu 1}\,,\ B_{\nu 2}\,,\ B_{\nu 3}\,,\ C_{\nu 2}\,,\ C_{\nu 3}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu}{s} E(z)dz,$$

le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3$. Si ν est égal à I ou 2, cette intégrale est de première espèce, et, d'après les relations établies dans la deuxième partie entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de première espèce (page 34), on aura

$$\begin{aligned}
&B_{11}(\mathrm{I} - m_1) - A_{11}(\mathrm{I} - n_1) &&+ n_1 C_{12} = 0,\\
&B_{12}(\mathrm{I} - m_2) - A_{12}(\mathrm{I} - n_2) - m_2 n_2 C_{12} &&+ n_2 C_{13} = 0,\\
&B_{13}(\mathrm{I} - m_3) - A_{13}(\mathrm{I} - n_3) - m_3 n_3 C_{13} &&= 0.
\end{aligned}$$

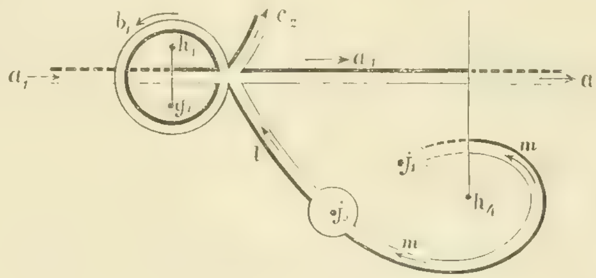
Mais actuellement $m_1 = m_2 = m_3 = \mathrm{I}$; donc

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}
&- A_{11}(\mathrm{I} - n_1) + n_1 C_{12} &&= 0,\\
&- A_{12}(\mathrm{I} - n_2) + n_2(C_{13} - C_{12}) &&= 0,\\
&- A_{13}(\mathrm{I} - n_3) - n_3 C_{13} &&= 0.
\end{aligned}\right.$$

On a de même pour l'intégrale $\psi_2(z)$

$$(6) \qquad \begin{cases} -A_{21}(1-n_1)+n_1C_{22} & =0, \\ -A_{22}(1-n_2)+n_2(C_{23}-C_{22}) & =0, \\ -A_{23}(1-n_3)-n_3C_{23} & =0. \end{cases}$$

L'intégrale $\psi_3(z)$ qui est de troisième espèce n'est plus uniforme sur la surface de Riemann R_{abc}: mais elle devient uniforme sur la surface R_{abclm} obtenue en traçant sur R_{abc} les deux coupures nouvelles l et m que nous figurons ci-dessus conformément à la disposition adoptée dans la théorie générale:



dans cette figure nous avons représenté, comme étant à distance finie, les points critiques logarithmiques j_0 et j_1 qui sont situés à l'infini.

Appelons

$$A_{31}, A_{32}, A_{33}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, C_{32}, C_{33}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $\psi_3(z)$ le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, l$ et m. Les modules de périodicité $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont aisés à calculer, comme nous l'avons montré dans la théorie générale des intégrales de troisième espèce. De plus, les relations entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de troisième espèce deviennent ici, puisque $m_1 = m_2 = m_3 = 1$:

$$(7) \qquad \begin{cases} -A_{31}(1-n_1)+n_1(C_{32}-\mathfrak{L}) & =0, \\ -A_{32}(1-n_2)+n_2(C_{33}-C_{32}) & =0, \\ A_{33}(1-n_3)-n_3C_{33} & =0. \end{cases}$$

Les relations précédentes (5), (6) et (7) permettent de simplifier l'expression (3) de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ indiquée à la page 150. En effet, si l'on remplace A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33} par leurs valeurs tirées de ces relations (5), (6), (7), on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \cdot \begin{vmatrix} C_{12} & C_{13}-C_{12} & -C_{13} \\ C_{22} & C_{23}-C_{22} & -C_{23} \\ C_{32}-\mathcal{L} & C_{33}-C_{32} & -C_{33} \end{vmatrix}$$

ou, en ajoutant les éléments de la première et de la dernière colonne à ceux de la seconde,

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \begin{vmatrix} C_{12} & 0 & -C_{13} \\ C_{22} & 0 & -C_{23} \\ C_{32}-\mathcal{L} & -\mathcal{L} & -C_{33} \end{vmatrix}.$$

ce qui donne en développant

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \cdot \mathcal{L} \cdot (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}).$$

On a donc enfin, pour le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, l'expression

$$(8) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_2)} \cdot \mathcal{L} \cdot (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}),$$

qui, en vertu des relations (5) et (6) des pages 152 et 153, peut aussi s'écrire

$$(9) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1-n_2} \cdot \mathcal{L} \cdot (A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}).$$

Le calcul de ce coefficient se trouve ainsi ramené à celui d'un déterminant de *quatre* intégrales simples. Ces quatre intégrales simples

$$A_{11} = \int_{L_1} \frac{z_1\,dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{13} = \int_{L_3} \frac{z_3\,dz_3}{s_3} E(z_3),$$

$$A_{21} = \int_{L_1} \frac{z_1^2\,dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{23} = \int_{L_3} \frac{z_3^2\,dz_3}{s_3} E(z_3),$$

se ramènent immédiatement à des intégrales rectilignes d'après la définition même des contours L_1 et L_3 (page 147). Il suffit de leur appliquer la méthode dont nous nous sommes servis dans la troisième partie, pour ramener des intégrales analogues à la forme

$$\psi(m, n) + \psi(-m, -n).$$

Développement de $z_1 + z_2 + z_3$.

Si l'on fait

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 = -\infty}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3 = +\infty} Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

on trouvera comme ci-dessus, en prenant garde à l'identité

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1\, dz_2\, dz_3,$$

ou encore

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{11} & A_{31} \\ A_{02} & A_{12} & A_{32} \\ A_{03} & A_{13} & A_{33} \end{vmatrix},$$

avec les notations de la page 150.

Les constantes

$$A_{01}, A_{02}, A_{03}; A_{11}, A_{12}, A_{13}$$

sont les modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\varphi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \varphi_1(z) = \int \frac{z\,dz}{s} E(z),$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3; ces deux intégrales sont de *première espèce*. Les constantes

$$A_{31}, A_{32}, A_{33}$$

sont les modules de périodicité, le long de ces mêmes coupures, de l'intégrale

$$\varphi_3(z) = \int \frac{z^3\,dz}{s} E(z)$$

qui est de *troisième espèce* avec deux points critiques logarithmiques à l'infini. Cette intégrale $\varphi_3(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abclm} représentée à la page 153; appelons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ ses modules de périodicité le long des coupures l et m; nous verrons, comme nous l'avons fait aux pages 153 et 154, que l'on a

$$(10) \qquad Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01} A_{13} - A_{03} A_{11}).$$

Le calcul de ce coefficient peut d'ailleurs se ramener à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

En effet on a

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

ou

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

en faisant pour abréger

$$a = 2\nu_1 p_1 + 2\nu_2 p_2 + 2\nu_3 p_3,$$

$$b = 2\nu_1 q_1 + 2\nu_2 q_2 + 2\nu_3 q_3,$$

$$c = 2\nu_1 r_1 + 2\nu_2 r_2 + 2\nu_3 r_3.$$

Donc

$$dE(z) = a \frac{dz}{s} E(z) + b \frac{z\,dz}{s} E(z) + c \frac{z^2\,dz}{s} E(z)$$

et en intégrant

$$E(z) = a\varphi_0(z) + b\varphi_1(z) + c\varphi_2(z) + C^{te}.$$

Les modules de périodicité du premier membre $E(z)$ étant *nuls*, il en est de même de ceux du second membre et l'on a, entre autres relations,

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$
$$aA_{02} + bA_{12} + cA_{22} = 0,$$
$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

d'où en éliminant b entre la première et la dernière,

$$(11) \qquad a(A_{01}A_{13} - A_{03}A_{11}) + c(A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23}) = 0,$$

formule qui ramène le calcul du coefficient $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

Développement de $z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

En faisant

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} R_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1u_1-2\nu_1u_2-2\nu_1u_3}$$

et prenant garde à l'identité bien connue

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

on trouvera, comme ci-dessus pour les développements de $z_1z_2z_3$ et $z_1 + z_2 + z_3$,

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3}\int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1s_2s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1dz_2dz_3,$$

ou encore

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{21} & A_{31} \\ A_{02} & A_{22} & A_{32} \\ A_{03} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont les modules de périodicité, le long des coupures a_1, a_2, a_3, des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \psi_2(z) = \int \frac{z^2\,dz}{s} E(z), \qquad \psi_3(z) = \int \frac{z^3\,dz}{s} E(z).$$

En transformant ce déterminant, comme le déterminant analogue (3) de la page 150, nous aurons

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}),$$

formule qui ramène aussi le calcul de ce coefficient à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$. En effet les relations entre les modules de périodicité établies à la page 157

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$

$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

donnent par l'elimination de c

(12) $$a(A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}) + b(A_{11} A_{23} - A_{21} A_{13}) = 0.$$

D'après cela, on a

$$aR_{\nu_1\nu_2\nu_3} + bP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0;$$

la formule (11) de la page 157 nous donne de même

$$aQ_{\nu_1\nu_2\nu_3} - cP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0.$$

Donc enfin

(13) $$\frac{P_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{a} = \frac{Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{c} = \frac{R_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{-b};$$

dans cette formule importante a, b, c ont les valeurs déjà indiquées (page 156)

$$a = 2(\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 + \nu_3 p_3),$$
$$b = 2(\nu_1 q_1 + \nu_2 q_2 + \nu_3 q_3),$$
$$c = 2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \nu_3 r_3);$$

on voit que cette formule (13), qui ramène les trois coefficients $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $R_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à l'un d'entre eux, est l'extension, au cas actuel, d'une formule analogue établie pour les fonctions abéliennes de genre 2 et ramenant les développements de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ l'un à l'autre.

Développements d'autres fonctions abéliennes résultant de l'inversion des mêmes équations.

On pourra appliquer la même méthode au développement en série trigonométrique d'une fonction abélienne des variables u_1, u_2, u_3 exprimée par un polynôme symétrique en z_1, z_2, z_3 et s_1, s_2, s_3.

Si l'on suppose une fonction de cette forme

$$f(z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3)$$

développée en série

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} S_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3},$$

le calcul du coefficient $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramènera par les mêmes méthodes au calcul *d'intégrales simples* qui ne sont autre chose que les modules de périodicité d'intégrales de la forme

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \qquad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu E(z) dz \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3.

Comme l'on a

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

la différentiation des expressions

$$z^\nu E(z)\ ,\ sz^\nu E(z)$$

où

$$\nu = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ \infty,$$

fournira des formules de réduction pour ces intégrales ψ_ν et φ_ν, formules entièrement semblables à celles que nous avons établies à la fin de la troisième partie.

Par exemple, on a identiquement

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1} E(z) dz + \frac{z^\nu(a + bz + cz^2)}{s} E(z) dz,$$

d'où en intégrant

$$z^\nu E(z) = \nu\varphi_{\nu-1}(z) + a\psi_\nu(z) + b\psi_{\nu+1}(z) + c\psi_{\nu+2}(z) + C^{te},$$

formule qui ramène toutes les intégrales $\varphi_\nu(z)$ à des intégrales $\psi_\nu(z)$.

Puis la différentiation de

$$sz^\nu E(z)$$

donnera une formule ramenant, par voie récurrente, toutes les intégrales $\psi_\nu(z)$ aux premières d'entre elles. Il est inutile de donner le détail de ces formules qui est entièrement élémentaire.

On conclut de là que toutes les intégrales définies qui figureront dans les coefficients tels que $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramèneront par voie récurrente à un nombre fini d'entre elles.

On ramènerait de même au calcul d'intégrales simples la détermination des coefficients du développement en série d'exponentielles $e^{2\nu_1 u_1 + 2\nu_2 u_2 + 2\nu_3 u_3}$ d'une fonction abélienne ayant l'une ou l'autre des formes

$$R(s_1\ ,\ z_1) + R(s_2\ ,\ z_2) + R(s_3\ ,\ z_3),$$

$$R(s_1\ ,\ z_1) R(s_2\ ,\ z_2) + R(s_2\ ,\ z_2) R(s_3\ ,\ z_3) + R(s_1\ ,\ z_1) R(s_3\ ,\ z_3),$$

$$R(s_1\ ,\ z_1) R(s_2\ ,\ z_2) R(s_3\ ,\ z_3),$$

où $R(s\ ,\ z)$ désigne une fonction rationnelle de s et z, à condition, bien entendu, que ce développement soit possible.

Ces nouvelles intégrales définies simples seront encore les modules de périodicité de certaines intégrales de fonctions à multiplicateurs: mais elles ne peuvent plus, par voie récurrente, se ramener à un nombre fini d'entre elles. On leur appliquera les théorèmes généraux indiqués dans la seconde partie.

Développements de certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

On peut développer par la même méthode certaines *fonctions rationnelles* mais *non symétriques* de $s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3$, c'est à dire certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

Prenons par exemple la fonction

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}}$$

qui reste finie et continue quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours appelés L_1, L_2, L_3. Cette fonction, qui est la racine carrée d'une fonction abélienne, sera développable en une série trigonométrique de la forme

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} T_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

convergente, comme les précédentes, pour des valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0.$$

On trouvera immédiatement, en suivant la même méthode que plus haut,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} dz_1 dz_2 dz_3,$$

c'est à dire, d'après nos notations de la page 150,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} A_{01} A_{02} A_{03}.$$

Le coefficient $T_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est ainsi exprimé en fonction des trois modules de périodicité

$$A_{01}, A_{02}, A_{03}$$

de l'intégrale $\psi_0(z)$. Si l'on appelle

$$C_{02}, C_{03}$$

les modules de périodicité de cette intégrale $\psi_0(z)$ le long des coupures c_2 et c_3, on a, comme à la page 152,

$$\begin{aligned} -A_{01}(1-n_1) + n_1 C_{02} &= 0, \\ -A_{02}(1-n_2) + n_2(C_{03}-C_{02}) &= 0, \\ -A_{03}(1-n_3) - n_3 C_{03} &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1-n_1}{n_1}A_{01} + \frac{1-n_2}{n_2}A_{02} + \frac{1-n_3}{n_3}A_{03} = 0.$$

Il restera donc à calculer A_{02} et A_{03}.

On ramènera au calcul des modules de périodicité de ces mêmes intégrales $\psi_\nu(z)$, le calcul des coefficients des développements en séries trigonométriques de toute fonction égale à un polynôme non symétrique en s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3; ou du produit d'une pareille fonction par $f(z_1, z_2, z_3)$.

Mais il nous paraît sans intérêt d'insister davantage sur ce sujet, et nous terminerons par quelques remarques, qui nous semblent fondamentales, sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Voyez un Mémoire de Riemann intitulé: *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten*, et les recherches de M. Poincaré sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Soient, comme précédemment, s et z deux variables liées par une relation algébrique de genre p et R la surface de Riemann correspondante. Considérons une équation linéaire d'ordre n

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s, z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s, z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(s, z)u = 0,$$

les coefficients $\varphi_1(s, z)$, $\varphi_2(s, z)$, ..., $\varphi_n(s, z)$ étant des *fonctions rationnelles* de s et z.

L'intégrale générale u de cette équation peut cesser d'être uniforme dans le voisinage de deux sortes de points: 1° les points de la surface de Riemann où certains des coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis; 2° les points de ramification de cette surface de Riemann.

1° Prenons d'abord un point α de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, ce point étant distinct des points de ramification. Nous supposons que, dans le voisinage de ce point, l'équation différentielle admette un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis, pour $z = \alpha$, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $z - \alpha$; et nous supposons de plus que *l'équation fondamentale déterminante* de M. Fuchs relative au point singulier $z = \alpha$ ne possède que des racines *entières*. (Voyez le Mémoire de M. Fuchs, Journal de Crelle T. 66, ou la Thèse présentée par M. Tannery à la Faculté des Sciences de Paris 1874, pages 41 et suiv.) Nous supposerons ces conditions remplies en tous les points ordinaires de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, les points à l'infini compris. Alors, dans le voisinage de chacun de ces points, $z = \alpha$, de la surface de Riemann, l'intégrale générale, ou bien sera uniforme ou bien contiendra dans son expression des puissances de $\log(z - \alpha)$; dans ce dernier cas *nous dirons que le point $z = \alpha$ est un point critique logarithmique de l'intégrale générale.*

2° Prenons maintenant un point de ramification $z = c$ et supposons que ce soit un point de ramification d'ordre m. Alors pour étudier l'intégrale générale dans le voisinage de ce point, nous ferons avec C. Neumann, d'après Riemann,

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m$$

(C. Neumann, loc. cit. pages 73—74), ζ étant une nouvelle variable indépendante et γ une constante. Dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, les coefficients de l'équation différentielle définissant u en fonction de ζ seront uniformes. Nous supposerons ces coefficients tels que l'équation admette, dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, un système fondamental d'intégrales dont les éléments restent finis pour $\zeta = \gamma$ quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $\zeta - \gamma$, et *que l'équation fondamentale déterminante* n'admette *que des racines entières.* Alors, dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, ou bien l'intégrale générale sera uniforme, ou bien elle contiendra dans son expression des puissances de $\log(\zeta - \gamma)$ et, dans ce dernier cas, nous dirons que le point de ramification $z = c$ est un point *critique logarithmique de l'intégrale.*

Telles sont les conditions que nous supposons remplies et qui caractérisent la classe d'équations différentielles linéaires dont nous nous occupons. D'après les méthodes données par M. Fuchs, on pourra toujours reconnaître si une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques donnés rentre dans cette classe spéciale. On pourra de plus, d'après ces mêmes méthodes, reconnaître si dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann l'intégrale générale est uniforme ou si elle admet ce point pour point critique logarithmique. Enfin, en supposant l'intégrale générale uniforme dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann où certains coefficients deviennent infinis, on pourra, d'après les racines de l'équation fondamentale déterminante, voir si cette intégrale *reste finie* au point considéré, ou si elle y devient infinie auquel cas le point, qu'il soit de ramification ou non, sera dit un pôle de l'intégrale.

Classification des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques qui viennent d'être définies.

En nous plaçant dans le même ordre d'idées que pour la classification des intégrales abéliennes, nous dirons:

1° qu'une de nos équations différentielles est *de première espèce ou encore que son intégrale générale est de première espèce* si cette intégrale générale est partout finie et n'a pas de points critiques logarithmiques;

2° qu'une de nos équations différentielles est *de deuxième espèce* ou encore que *son intégrale générale est de deuxième espèce* si cette intégrale générale a des *pôles mais n'a pas* de points critiques logarithmiques;

3° enfin qu'une de nos équations différentielles est de *troisième espèce* ou encore que son intégrale générale est de *troisième espèce* si cette intégrale générale possède des points critiques logarithmiques.

Les intégrales de fonctions à multiplicateurs, étudiées dans la deuxième partie, fournissent des exemples simples de ces trois espèces d'équations différentielles.

Soit par exemple

$$u = \omega(z)$$

une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs: sa dérivée

$$\frac{du}{dz} = \omega'(z)$$

sera une fonction à multiplicateurs, et, comme la dérivée logarithmique d'une fonction à multiplicateurs est une fonction algébrique rationnelle en s et z, on aura enfin

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \varphi_1(s, z)\frac{du}{dz} = 0, \tag{14}$$

$\varphi_1(s, z)$ désignant la fonction rationnelle de s et z

$$-\frac{d\log\omega'(z)}{dz}.$$

L'équation différentielle du second ordre en u ainsi obtenue rentre dans la classe que nous considérons ici. Son intégrale générale est

$$u = A\omega(z) + B,$$

A et B étant des constantes arbitraires: elle est donc de *première espèce* comme restant finie et n'ayant pas de points critiques logarithmiques.

De même si l'on fait

$$u = t(z\,,\,z_0)$$

où $t(z\,,\,z_0)$ désigne une intégrale de seconde espèce d'une fonction à multiplicateurs, u vérifie une équation linéaire de la forme ci-dessus (14), à coefficient algébrique, ayant pour intégrale générale

$$u = At(z\,,\,z_0) + B;$$

cette nouvelle équation serait donc de *seconde espèce.*

Enfin une intégrale de troisième espèce d'une fonction à multiplicateurs

$$u = \varpi(z\,,\,z_0)$$

vérifie aussi une équation de la forme (14) ayant pour intégrale

$$u = A\varpi(z\,,\,z_0) + B;$$

cette équation différentielle serait donc de *troisième espèce.*

On pourrait, plus généralement, former ainsi des équations différentielles linéaires de la classe indiquée admettant pour intégrales des fonctions algébriques entières d'intégrales abéliennes et d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Mais nous laissons de coté ces exemples pour étudier les propriétés de l'intégrale générale d'une de nos équations, en suivant la méthode employée pour les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

Equations différentielles de première ou deuxième espèce.

Supposons que l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s\,,\,z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s\,,\,z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(s\,,\,z)u = 0$$

soit de première ou de deuxième espèce. Alors l'intégrale générale u est une fonction uniforme de z sur la surface de Riemann R_{abc} rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$a_1\,,\,a_2\,,\,\ldots,\,a_p\,;\;\; b_1\,,\,b_2\,,\,\ldots\,,\,b_p\,;\;\; c_2\,,\,c_3\,,\,\ldots\,,\,c_p\,.$$

Nous supposerons que ces coupures présentent la disposition particulière que nous avons adoptée dans la deuxième partie et qui se trouve reproduite à la page 145; la coupure c_h partant du point de croisement des coupures a_{h-1} et b_{h-1} pour aboutir au point de croisement des coupures a_h et b_h $(h = 2, 3, \ldots, p)$.

Soient $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z)$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face sur le bord droit. On aura *le long de la coupure* a_k

$$
\begin{aligned}
u_1(\lambda) &= A_{11}^{(k)} u_1(\rho) + A_{12}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{1n}^{(k)} u_n(\rho), \\
u_2(\lambda) &= A_{21}^{(k)} u_1(\rho) + A_{22}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{2n}^{(k)} u_n(\rho), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n(\lambda) &= A_{n1}^{(k)} u_1(\rho) + A_{n2}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{nn}^{(k)} u_n(\rho),
\end{aligned}
$$

les quantités $A_{ij}^{(k)}$ étant des constantes. En désignant par S_k la substitution

$$
S_k = \begin{vmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \ldots & A_{1n}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \ldots & A_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}^{(k)} & A_{n2}^{(k)} & \ldots & A_{nn}^{(k)} \end{vmatrix},
$$

nous écrirons pour abréger

$$
u(\lambda) \doteq S_k u(\rho)
$$

pour rappeler que l'on obtient les valeurs $u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)$ en faisant, sur $u_1(\rho), u_2(\rho), \ldots, u_n(\rho)$, la substitution S_k.

Ainsi l'on a

$$
\textit{le long de } a_k\text{:} \quad u(\lambda) = S_k u(\rho). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}
$$

On aura de même, en désignant par T_k une certaine substitution

$$
T_k = \begin{vmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} & \ldots & B_{1n}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} & \ldots & B_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1}^{(k)} & B_{n2}^{(k)} & \ldots & B_{nn}^{(k)} \end{vmatrix},
$$

le long de la coupure b_k

$$u(\lambda) = T_k u(\rho). \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

Enfin, en désignant par Σ_h une substitution

$$\Sigma_h \begin{vmatrix} C_{11}^{(h)} & C_{12}^{(h)} & \dots & C_{1n}^{(h)} \\ C_{21}^{(h)} & C_{22}^{(h)} & \dots & C_{2n}^{(h)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}^{(h)} & C_{n2}^{(h)} & \dots & C_{nn}^{(h)} \end{vmatrix},$$

on aura *le long de la coupure* c_h:

$$u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho). \qquad (h=2,3,\dots,p)$$

Ces $(3p-1)$ substitutions

$$S_k\,,\; T_k\,,\; \Sigma_h, \qquad \binom{k=1,2,\dots,p}{h=2,3,\dots,p}$$

formeront ce que l'on peut appeler le groupe de l'équation.

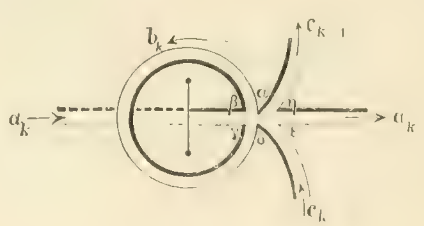
Ces substitutions sont liées par des relations qui se déduisent de la considération des points de concours des coupures

$$a_k\,,\; b_k\,,\; c_k\,,\; c_{k+1}. \qquad (k=1,2,3,\dots,p)$$

Voici comment on obtient ces relations.

Relations entre les substitutions S_k, T_k, Σ_h.

Figurons le point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}



et appelons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ les sommets des six angles formés par les bords des coupures, les bords gauches étant marqués d'un trait plus fort. On aura successivement

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} u(\beta) &= T_k u(\alpha), \\ u(\gamma) &= S_k^{-1} u(\beta), \\ u(\delta) &= T_k^{-1} u(\gamma), \\ u(\varepsilon) &= \Sigma_k^{-1} u(\delta), \\ u(\eta) &= S_k u(\varepsilon), \\ u(\alpha) &= \Sigma_{k+1} u(\eta). \end{aligned}\right.$$

Dans ces relations qui résultent immédiatement de la définition même des substitutions S_k, T_k, Σ_k, nous désignons, conformément à l'usage, par

$$S_k^{-1}, \ T_k^{-1}, \ \Sigma_k^{-1}$$

les substitutions inverses de S_k, T_k, Σ_k. Par exemple, le point β étant sur le bord gauche de la coupure a_k et le point γ en face sur le bord droit, on aura

$$u(\beta) = S_k u(\gamma)$$

d'où, comme nous l'avons écrit,

$$u(\gamma) = S_k^{-1} u(\beta).$$

On tire des relations (15) la relation suivante entre les substitutions considérées

$$(16) \qquad T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} = 1,$$

qui signifie que ces substitutions faites successivement dans l'ordre indiqué conduisent à la substitution *unité*. On peut écrire cette relation (16) de façon que l'une quelconque des six substitutions soit la première, l'ordre dans lequel elles se suivent restant d'ailleurs le même. Ainsi

$$S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} = 1,$$

$$T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} = 1,$$

$$\Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k = 1,$$

etc.

En faisant $k = 1, 2, \ldots, p$ on aura ainsi p relations analogues à (16). Comme les coupures c_1 et c_{p+1} n'existent pas, il faudra supposer

$$\Sigma_1 = 1, \qquad \Sigma_{p+1} = 1.$$

Conséquence de ces relations.

On conclut de là que, les $2p$ substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ une fois connues, les $(p-1)$ substitutions

$$\Sigma_h, \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

s'en déduisent immédiatement.

En effet on peut aussi écrire,

$$(17) \qquad \Sigma_{k+1}^{-1} = S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k$$

comme il résulte directement des relations (15). Faisant alors $k = 1$ et $\Sigma_1^{-1} = 1$, comme nous venons de le dire, nous aurons

$$\Sigma_2^{-1} = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1,$$

ce qui donne Σ_2.

Faisant ensuite, dans la relation (17), $k = 2$, nous aurons

$$\Sigma_3^{-1} = S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2$$

et Σ_3^{-1} se trouve déterminée. En faisant de même successivement, dans (17), $k = 3, \ldots, p-1$ on calculera de proche en proche les substitutions $\Sigma_4, \Sigma_5, \ldots, \Sigma_p$.

Relation entre les 2p substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

Après avoir calculé les substitutions $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_p$, comme nous venons de le voir, en fonction des substitutions S_k et T_k, on aura, en faisant $k = p$ dans la relation (17) et se rappelant que $\Sigma_{p+1} = 1$, la relation

$$(18) \qquad 1 = S_p \Sigma_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{-1} T_p,$$

qui donne une relation entre les substitutions S_k et T_k, puisque Σ_p^{-1} est connu en fonction de ces substitutions.

Cas particuliers.

Si nous supposons le genre $p = 1$ nos équations de première et de deuxième espèce se ramènent immédiatement aux équations linéaires à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme que M. Picard a intégrées à l'aide de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Dans ce cas il y a une coupure a_1, une coupure b_1 et deux substitutions S_1 et T_1. La relation (18) entre les $2p$ substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ se réduit à

$$1 = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1$$

ou

$$T_1^{-1} S_1 = S_1 T_1^{-1},$$

qui montre que les substitutions S_1 et T_1^{-1} sont *permutables;* ce qui est le fondement du théorème de M. Picard.

Supposons maintenant $p = 2$. Il y aura alors 5 substitutions

$$S_1, S_2, T_1, T_2, \Sigma_2,$$

et l'on aura, d'après la relation (17) de la page précédente où l'on fait successivement $k = 1$, $k = 2$,

$$(19) \qquad \begin{aligned} \Sigma_2^{-1} &= S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1, \\ 1 &= S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2 \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de Σ_2^{-1},

$$(20) \qquad 1 = S_2 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2.$$

Par exemple, si $S_1 = 1$, on a aussi $\Sigma_2 = 1$, puis d'après (20)

$$1 = S_2 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2,$$

ce qui montre qu'alors les substitutions S_2 et T_2^{-1} seraient permutables.

Formation des équations les plus générales de première et deuxième espèce d'un degré donné.

Première espèce. En appliquant les théorèmes de M. Fuchs, on arrivera sans peine à former toutes les équations d'ordre n dont l'intégrale générale est de première espèce. Il existe de ces équations dans chaque ordre n. Nous en avons formé une du second ordre à la page 165. Si l'on appelle $\omega(z)$ une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs et $E(z)$ une exponentielle de la forme $e^{-2[\lambda_1 w_1(z)+\lambda_2 w_2(z)+\ldots+\lambda_p w_p(z)]}$, le produit

$$u = E(z)\omega(z)$$

satisfait de même à une équation linéaire du second ordre ayant pour intégrale générale

$$u = E(z)[A\omega(z) + B],$$

A et B étant des constantes arbitraires. (Cette exponentielle $E(z)$ a, comme dans tout ce qui précède, pour exposant une expression linéaire à coefficients constants d'intégrales abéliennes de première espèce).

Le produit

$$u = E(z)\omega^{n-1}(z),$$

n étant un entier positif, vérifiera une équation linéaire d'ordre n, qui sera par suite un exemple d'équation de première espèce. Cette équation aura pour intégrale générale

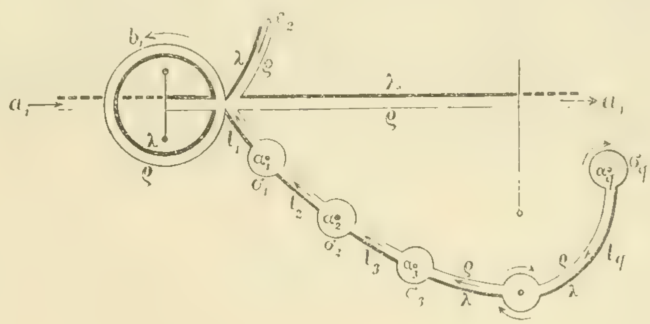
$$u = E(z)[A_1\omega^{n-1}(z) + A_2\omega^{n-2}(z) + A_3\omega^{n-3}(z) + \ldots + A_{n-1}\omega(z) + A_n],$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des constantes arbitraires.

Equations de deuxième espèce. On pourra de même former les équations d'ordre n de deuxième espèce dont l'intégrale générale admette des pôles donnés d'avance. Il est facile d'en donner des exemples analogues aux précédents, composés avec des intégrales de seconde espèce de fonctions à multiplicateurs ou les dérivées de ces intégrales par rapport au paramètre.

Equations différentielles linéaires de troisième espèce.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de troisième espèce admet des points critiques logarithmiques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Elle n'est donc plus uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann: mais elle devient uniforme sur la surface R_{abcl} obtenue par l'adjonction d'une coupure $l_1 l_2 \ldots l_q$ partant du point de croisement des coupures $a_1 b_1 c_2$ et réunissant les unes aux autres des circonférences infiniment petits $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ de centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Nous avons figuré ci-dessous cette coupure $l_1, l_2, \ldots, l_q$.



Si, comme plus haut, on appelle

$$u_1(z)\,,\ u_2(z)\,,\ \ldots\,,\ u_n(z)$$

un système fondamental d'intégrales, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face sur le bord droit, on aura, comme précédemment,

$$\left.\begin{array}{l}\text{le long de la coupure } a_k:\quad u(\lambda) = S_k u(\rho),\\ \text{le long de la coupure } b_k:\quad u(\lambda) = T_k u(\rho),\end{array}\right. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de la coupure } c_h:\quad u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho), \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

S_k, T_k, Σ_h désignant certaines substitutions linéaires.

Enfin on aura ici le long des nouvelles coupures $l_1, l_2, \ldots, l_q$,

$$\text{le long de la coupure } l_j:\quad u(\lambda) = L_j u(\rho), \qquad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,q)}$$

L_j désignant aussi une substitution linéaire à coefficients constants.

La substitution L_q est *connue* car on connaît la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point critique logarithmique α_q où toutes les racines de l'équation fondamentale déterminante sont entières.

Les substitutions

$$S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h$$

sont liées entre elles par des relations identiques à celles que nous avons établies aux pages 169 et 170, avec cette seule différence que la substitution Σ_1 n'est plus, dans le cas actuel, égale à 1 mais bien à L_1, ainsi qu'il résulte de la figure de la page précédente.

Ces indications sommaires nous paraissent suffisantes pour montrer comment la méthode de Riemann que nous avons employée avec succès pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut, de la même façon, servir à l'étude des intégrales d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 13. — 1890. — TOME 13.

Acta mathematica